

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES INFORMATIQUES

#### Chaos et fractales en médecine

Reniers, Thierry

*Award date:*  
1992

*Awarding institution:*  
Université de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# **CHAOS ET FRACTALES EN MEDECINE.**

Thierry Reniers

septembre 1992

Mémoire de Licence et Maîtrise en Informatique présenté par Thierry Reniers en septembre 1992.

Promoteur : Professeur Jean Fichet.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J. Fichet pour son aide précieuse, sa disponibilité, et pour m'avoir dirigé tout au long de l'élaboration de ce travail.

J'adresse également toute ma reconnaissance au Docteur E. Fastrez et à sa famille pour leur collaboration et leurs encouragements.

Enfin, je remercie Wolfgang Heinen pour son expérience de la programmation sous Windows.

# CHAOS ET FRACTALES

EN

MEDECINE.

**Résumé :** *Dans le corps humain, des structures fractales abondent et de nombreux rythmes physiologiques semblent chaotiques. Le chaos et les fractales sont deux concepts étroitement liés et associés à la dynamique non linéaire des systèmes. L'application de la géométrie fractale et de la théorie des systèmes dynamiques en médecine, nous apporte une nouvelle compréhension de la complexité de notre corps. Ce travail étudie en particulier, après quelques sections théoriques, la structure fractale des vaisseaux rétiens, et le rythme physiologique du coeur.*

**Abstract :** *Fractal structures abound in the human body and many physiological rhythms seem chaotic. The chaos and the fractals are two closely connected concepts and are associated with the non linear dynamical systems. The application of fractal geometry and dynamical system theory in medicine, brings to us a new understanding of our complex body. After some theoretical sections, this work studies particularly the fractal structure of the retinal vessels and the cardiac physiological rhythm.*

Mémoire de Licence et Maîtrise en Informatique présenté par Thierry Reniers en septembre 1992.

Promoteur : Professeur Jean Fichet.

## 0. Introduction.

Les concepts de chaos et d'objet fractal deviennent depuis quelques années, de plus en plus populaires, non seulement au sein de la communauté scientifique, mais aussi parmi les personnes qui ne possèdent pas un bagage mathématique très spécialisé. La publication de livres et d'articles accessibles au grand public, sur la beauté fascinante de la géométrie fractale et des systèmes dynamiques complexes, expliquent l'engouement pour ces sujets très à la mode.

La mathématique du désordre et la tendance géométrique qui en découle, se sont largement développées au contact des mathématiques appliquées, et principalement de l'analyse numérique. Cette discipline se caractérise par une utilisation permanente de l'ordinateur; l'outil indispensable pour traduire en images les entités statiques ou dynamiques engendrées par les algorithmes du "désordre".

Mais comment pouvons-nous définir un objet fractal, une dynamique chaotique, et établir le lien entre ces deux concepts ? Benoît Mandelbrot définit les fractales de la manière suivante : au sens intuitif, une fractale est une figure géométrique ou un objet naturel constitué par des parties de taille et d'orientation diverse mais de forme ou de structure semblable au tout. Elle est très irrégulière, interrompue ou fragmentée, et le reste quelle que soit l'échelle d'observation.

La géométrie classique euclidienne, fournit des figures régulières, lisses et symétriques, c'est-à-dire un langage pour décrire des objets physiques ou mathématiques produits par l'homme. Mais elle ne convient pas pour modéliser des structures naturelles souvent rugueuses et poreuses au même degré à toutes les échelles. La géométrie fractale est une extension de la géométrie classique, elle permet d'analyser mathématiquement et de représenter des objets et des phénomènes naturels. Ces phénomènes naturels relèvent dans la plupart des cas, de processus désordonnés et chaotiques décrits généralement par des équations non linéaires. Chaos et fractales sont donc associés à la dynamique non linéaire des systèmes : là où des processus chaotiques façonnent l'environnement comme le bord de mer, l'atmosphère ou une faille géologique, des structures fractales apparaissent telles que la ligne côtière, les nuages ou les formations rocheuses.

Les fractales et le chaos jouent un rôle considérable en médecine. Que ce soit dans la géométrie des organes ou dans les rythmes des systèmes physiologiques, ces concepts peu-

vent nous aider à mieux comprendre le monde biologique qui nous entoure, et à découvrir de nouvelles méthodes pour déceler et prévenir certaines pathologies.

Mais avant d'analyser ce rôle, j'aborderai dans ce mémoire, l'étude théorique des fractales selon deux optiques a priori différentes mais non contradictoires, car elles se rejoignent grâce au concept commun de système dynamique.

Dans un premier temps, je me base quelque peu sur l'approche topologique développée par Michael Barnsley dans son livre intitulé "Fractals everywhere" pour définir formellement un objet fractal et la géométrie sous-jacente. Barnsley introduit également les systèmes dynamiques et la notion de chaos d'un point de vue topologique pour montrer la présence d'une dynamique chaotique dans l'espace des fractales. Je me contenterai de ne reprendre que quelques définitions et théorèmes qui me permettront d'établir le lien avec la deuxième optique étudiée, à savoir les fractales dans la théorie qualitative des systèmes dynamiques non linéaires associés aux équations différentielles du premier ordre, et le concept d'attracteur étrange. Les deux approches abordées sont d'une part topologique et formelle, et d'autre part dynamique et qualitative. Elles font l'objet respectivement du chapitre 1 et 2. Mon objectif est de montrer la cohérence entre ces deux aspects, le lien entre chaos et fractale, la notion commune étant celle d'attracteur.

Le chapitre 3 est consacré à la dimension fractale; une manière de caractériser quantitativement les objets fractals. Cet aperçu théorique nous sera très utile dans les chapitres suivants où nous verrons l'importance des structures fractales en physiologie humaine.

Enfin, d'un point de vue pratique, nous aurons également deux types d'application médicale : dans le chapitre 4, la topologie et la géométrie nous aideront à déterminer la dimension fractale d'un organe du corps humain comme les vaisseaux sanguins de la rétine. Ensuite, nous étudierons au chapitre 5, la dynamique chaotique d'un rythme physiologique comme le rythme cardiaque.

## 1. Une approche topologique.

### 1. 1. LES TRANSFORMATIONS SUR DES ESPACES MÉTRIQUES.

Un système dynamique se définit à partir d'une transformation sur un espace métrique. En outre, en géométrie fractale, nous manipulons des sous-ensembles d'un espace comme celui des réels  $R$ , ou celui des complexes  $C$ , qui sont générés par de simples transformations de l'espace dans lui-même.

Cette section introduit donc quelques concepts relatifs aux transformations sur des espaces métriques. Par ailleurs, des notions préliminaires de topologie et des propriétés générales de sous-ensemble d'un espace métrique, à savoir la continuité, la complétude, la convergence, la compacité,...,nécessaires pour définir formellement les fractales, sont rappelées en annexe.

**Définition 1.1 :** Un *espace métrique* est un couple  $(X, d)$  où  $X$  est un espace muni d'une fonction à valeur réelle  $d : X \times X \rightarrow R$  appelée *métrique*, et mesurant la distance entre deux points  $x$  et  $y$  de  $X$ .  $d$  satisfait aux axiomes suivants :

1.  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ .
2.  $0 < d(x, y) < +\infty \quad \forall x, y \in X, x \neq y$ .
3.  $d(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$ .
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ .

**Définition 1.2 :** Soit un espace métrique  $(X, d)$ . Une *transformation* sur  $X$  est une fonction  $f : X \rightarrow X$  qui à chaque point  $x \in X$  fait correspondre un point unique  $f(x) \in X$ .

**Définition 1.3 :** Soit la transformation sur un espace métrique,  $f : X \rightarrow X$ . Les *itérées* de  $f$  sont les transformations  $f^n : X \rightarrow X$  définies par  $f^0(x) = x$ ,  $f^1(x) = f(x)$ ,  $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \quad \forall n \in N$ , l'ensemble des entiers naturels.

Un cas particulier de transformation utilisée par une méthode de construction d'une fractale, appelée IFS et dont nous parlerons plus loin, est la transformation affine sur le plan euclidien.

**Définition 1.4 :** Une *transformation affine* sur le plan euclidien est une transformation  $w : R^2 \rightarrow R^2$  de la forme

$$w(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f)$$

où  $a, b, c, d, e$  et  $f$  sont des réels. En notation matricielle, nous avons

$$w(x) = Ax + v$$

$$\text{où } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Une transformation affine consiste donc en une transformation linéaire  $Ax$  qui déforme l'espace par rapport à l'origine, suivie d'une translation par le vecteur  $v$ .

**Définition 1.5 :** Soit une transformation sur un espace métrique,  $f : X \rightarrow X$ . Un *point fixe* de la transformation est un point  $x^* \in X$  tel que  $x^* = f(x^*)$ . Il n'est donc pas déplacé par la transformation.

Nous ne pouvons encore mesurer ici toute l'importance de la notion de point fixe, mais elle nous sera essentielle pour définir formellement une fractale et établir par la suite, la relation entre cette définition et l'autre approche plus qualitative des systèmes dynamiques et des processus chaotiques grâce au concept d'attracteur. Il est alors intéressant d'introduire la contractivité.

**Définition 1.6 :** Une transformation  $f : X \rightarrow X$  sur un espace métrique  $(X, d)$  est une *transformation contractive* si et seulement si il existe une constante  $s : 0 \leq s < 1$  appelée *facteur de contractivité* pour  $f$ , telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq s d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Illustrons le concept de transformation contractive et de point fixe sur la figure 1.1. La suite des itérées de la transformation contractive  $f$  sur l'espace métrique et compact  $X$ , semble converger vers le point fixe de  $f$ , le centre de la figure. Le théorème suivant le confirme.

**Théorème 1.1 :** Soit  $f : X \rightarrow X$ , une contraction sur un espace métrique et complet  $(X, d)$ . Alors,  $f$  possède un et un seul point fixe  $x^* \in X$  et de plus, la suite des itérées de  $f$ ,  $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  converge vers  $x^*$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^* \quad \forall x \in X$$

en ce sens que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), x^*) = 0 \quad \forall x \in X$$

preuve : Soient  $x$ , un point quelconque de  $X$  et  $s$ , le facteur de contractivité pour  $f$ . Considérons la suite  $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$ . C'est une suite de Cauchy, car pour



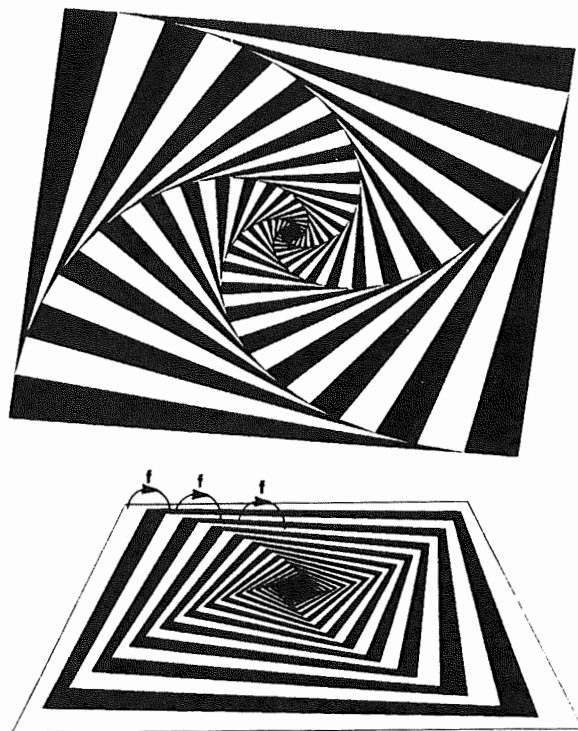


figure 1.1. contractivité et point fixe.

$m < n$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 d(f^n(x), f^m(x)) &\leq d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + \dots + d(f^{m+1}(x), f^m(x)) \\
 &\leq (s^{n-1} + s^{n-2} + \dots + s^m) d(f(x), x) \\
 &\leq \frac{s^m}{1-s} d(f(x), x)
 \end{aligned}$$

car  $\sum_{i=m}^{n-1} s^i$  est une progression géométrique de raison  $s < 1$ . Pour  $m$  suffisamment grand, cette dernière expression est aussi petite que l'on veut car  $s < 1$ . Nous avons donc une suite de Cauchy. Or,  $X$  est un espace complet, et toute suite de Cauchy dans un espace complet converge. Soit  $x^*$ , le point limite de cette suite, c'est-à-dire :

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$$

De plus, toute application contractive est continue, donc nous avons

$$f(x^*) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x^*$$

$x^*$  est bien le point fixe, et il est unique, car si il existait  $y^* \in X$  tel que  $y^* = f(y^*)$ , nous aurions

$$d(f(x^*), f(y^*)) = d(x^*, y^*) \leq s d(x^*, y^*)$$

ce qui n'est possible que si  $d(x^*, y^*) = 0$ , c'est-à-dire  $x^* = y^*$ .  $\square$

## 1. 2. SYSTÈMES DYNAMIQUES, ORBITES, ATTRACTION ET RÉPULSION.

**Définition 1.7 :** Un *système dynamique* est une transformation  $f : X \rightarrow X$  sur un espace métrique  $(X, d)$ , et se note  $\{X; f\}$ . L' *orbite* d'un point  $x \in X$  est la suite des itérées  $\{f^n(x)\}$  pour  $n$  allant de 0 à l'infini.

Nous voulons décrire la dynamique de  $f$ , c'est-à-dire le comportement des points de l'espace métrique  $X$  sous l'effet des itérations de  $f$ . La question principale à se poser en système dynamique, est de savoir si l'on peut prévoir le comportement de toutes les orbites de  $f$ , ou encore, que dire de la limite de  $f^n(x)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ? L'orbite d'un simple point peut être un ensemble géométriquement complexe.

Voyons un exemple d'étude de la dynamique d'une transformation  $f$ .

exemple : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ . Le système dynamique défini par  $f$  est donc  $\{\mathbb{R}; x^2\}$ . Il est clair que

$$|x| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = +\infty$$

$$|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$$

$$f^n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f^n(-1) = 1 \quad \forall n \geq 1$$

$$f^n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Toutes les orbites convergent soit vers l'infini, soit vers 0, sauf en deux points : -1 et 1. 0 et 1 sont deux points fixes de  $f$ , mais nous devons les distinguer dans la mesure où tous les points proches de 0 voient leur orbite attirée vers 0, tandis que tous les points proches de 1 voient leur orbite s'éloigner de 1. 0 et 1 sont alors respectivement appelés *point fixe attractif* et *point fixe répulsif*.

Une technique simple pour l'étude de tels systèmes dynamiques unidimensionnels, est l'analyse graphique. Cette technique permet de prévoir le comportement des orbites à partir du graphe de la fonction. La méthode consiste à représenter sur un même diagramme, la diagonale  $y = x$  et le graphe de  $f$ , puis à répéter la procédure suivante :

Si nous traçons une ligne verticale du point  $(x, x)$  du graphe de  $f$ , suivie d'une ligne horizontale vers la diagonale, nous obtenons le point  $(f(x), f(x))$ . Si nous recommençons avec  $(f(x), f(x))$ , nous avons le point  $(f^2(x), f^2(x))$ , et ainsi de suite. L'orbite du point  $x$  est ainsi constituée le long de la diagonale. Cela donne pour l'exemple  $f(x) = 4\mu x(1 - x)$  où  $\mu = 0.7$  et  $x \in [0, 1]$ , la figure 1.2. Cette figure illustre bien le caractère attractif du

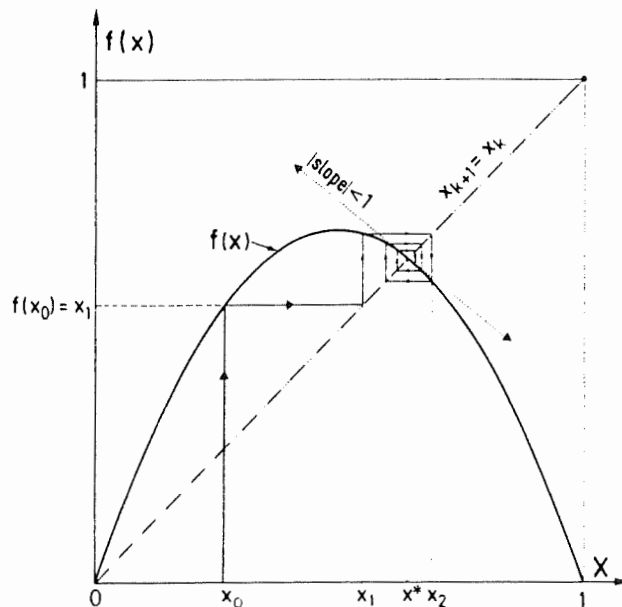


figure 1.2. graphe de  $f(x) = 4\mu x(1 - x)$  où  $\mu = 0.7$ .

point fixe  $x^*$  (l'orbite de  $x_0$  s'en approche) et répulsif du point fixe 0 (l'orbite de  $x_0$  s'en éloigne).

Nous introduisons alors les définitions suivantes :

**Définition 1.8 :** Soient un système dynamique  $\{X; f\}$  et  $x^*$  un point fixe de  $f$ . Le point  $x^*$  est un *point fixe attractif* si il existe un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que  $f$  applique la boule fermée de centre  $x^*$  et de rayon  $\varepsilon$  :  $B(x^*, \varepsilon) = \{y \in X : d(x^*, y) \leq \varepsilon\}$  dans elle-même et

soit une contraction sur  $B(x^*, \varepsilon)$ , c'est-à-dire :

$$\exists s : 0 \leq s < 1 : d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y) \quad \forall x, y \in B(x^*, \varepsilon)$$

d'où, en particulier :

$$\exists s : 0 \leq s < 1 : d(f(x^*), f(y)) \leq sd(x^*, y) \quad \forall y \in B(x^*, \varepsilon)$$

Le point  $x^*$  sera par contre un *point fixe répulsif* si il existe des nombres  $\varepsilon' > 0$  et  $c > 1$  tels que

$$d(f(x^*), f(y)) \geq cd(x^*, y) \quad \forall y \in B(x^*, \varepsilon')$$

Nous pouvons remarquer sur le diagramme de la figure 1.2, que la pente de la tangente au graphe de  $f$  au point 0 est supérieure à 1, et celle de la tangente au point  $x^*$  est inférieure à 1. Il existe une autre définition équivalente des points fixes du type attractif et du type répulsif, plus commode d'un point de vue analytique :

Soient  $f$  continue et différentiable, et  $x^*$  un point fixe de  $f$ . Le point fixe est attractif si  $|f'(x)| < 1$ , il est répulsif si  $|f'(x)| > 1$ , avec

$$f'(x) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{df(x)}{dx}$$

Voyons maintenant la notion de périodicité :

**Définition 1.9 :** Soit un système dynamique  $\{X; f\}$ . Un point  $x \in X$  est un *point périodique* de  $f$  de période  $n$  si  $f^n(x) = x$  et  $f^i(x) \neq x$  pour  $0 < i < n$ . L'orbite d'un point périodique est appelée un *cycle* de  $f$ . La *période* d'un cycle de  $f$  est la période d'un point du cycle.

Nous pouvons donc parler de *point périodique attractif* ou *répulsif* : Soit un point périodique  $x$  de période  $n$ , il est attractif (respectivement répulsif) si c'est un point fixe attractif (respectivement répulsif) de  $f^n$ , c'est-à-dire si  $|f^n(x)| < 1$  (respectivement  $|f^n(x)| > 1$ ). Un cycle de période  $n$  est un *cycle attractif* (respectivement *cycle répulsif*) de  $f$  si il contient un point périodique attractif (respectivement répulsif) de  $f$  de période  $n$ .

Illustrons la périodicité d'une orbite sur l'exemple suivant :

exemple : Soit le système dynamique  $\{R; f\}$  défini par  $f(x) = x^2 - 1$ . Nous avons  $f(0) = -1$  et  $f(-1) = 0$ . Les points 0 et -1 se situent sur un cycle attractif de période 2, en effet :

$f^2(x) = f(x^2 - 1) = x^4 - 2x^2 \Rightarrow f^2(0) = 0$  et  $f^2(-1) = -1$  tandis que  $f(0) \neq 0$  et  $f(-1) \neq -1$ . De plus,  $|(f^2)'(0)| = |(f^2)'(-1)| < 1$ .

Le cycle est bien attractif de période 2, et cela donne la figure 1.3.

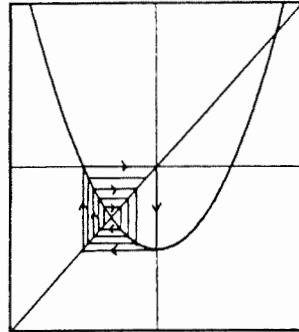


figure 1.3. analyse graphique de  $f(x) = x^2 - 1$ .

### 1. 3. EN ROUTE VERS LE CHAOS TOPOLOGIQUE.

Dans les dernières décennies, les recherches sur les systèmes dynamiques ont connu un essor considérable. L'origine de ce progrès fulgurant est la découverte du comportement extrêmement imprévisible que peuvent avoir les systèmes dynamiques les plus simples. Comme exemple, nous pouvons citer le cas de la transformation quadratique définie sur l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = x^2 + c$ , où  $c$  est un paramètre réel. L'itération de cette fonction semble être un procédé dynamique non linéaire simple. Cependant, plusieurs valeurs du paramètre  $c$  donnent lieu à une dynamique complexe et chaotique.

Mais le chaos est un terme dont on abuse souvent en système dynamique, il n'en existe pas une définition bien établie et uniformément acceptée dans la littérature scientifique. C'est une "science nouvelle".

Pour rester cohérent avec la démarche suivie jusqu'alors, nous allons définir un système chaotique de manière topologique. La section suivante sur la géométrie fractale continuera cette approche.

**Définition 1.10 :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Un sous-ensemble  $B \subset X$  est un

*sous-ensemble dense* dans  $X$  si la fermeture de  $B = X$ . Une suite  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  est une *suite dense* si  $\forall a \in X$ , il existe une sous-suite  $\{x_{\sigma_n}\}_{n=0}^{\infty}$  convergente vers  $a$ . En particulier, une orbite d'un système dynamique  $\{X; f\}$  est dense dans  $X$ , si la suite de ses points (itérées) est dense dans  $X$ .

**Définition 1.11 :** Un système dynamique  $\{X; f\}$  est un *système dynamique transitif* si pour toute paire  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  de sous-ensembles ouverts de l'espace métrique  $(X, d)$ , il existe un entier fini  $n$  tel que  $\mathcal{U} \cap f^n(\mathcal{V}) \neq \emptyset$ .

*exemple :* Comme exemple de système dynamique transitif, nous pouvons prendre  $\{[0, 1]; f(x) = \min\{2x, 2 - 2x\}\}$ . En effet,  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont toute paire d'intervalles ouverts de l'espace métrique  $[0, 1]$  muni de la distance euclidienne. Chaque application de la transformation augmente la longueur de l'intervalle  $\mathcal{V}$ . Il existera donc bien un entier fini  $n$  tel que  $f^n(\mathcal{V})$  ait une intersection non vide avec  $\mathcal{U}$ .

**Définition 1.12 :** Un système dynamique  $\{X; f\}$  est un *système dynamique sensible aux conditions initiales* si il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in X$  et pour toute boule fermée  $B(x, \varepsilon)$  de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon > 0$ , il existe  $y \neq x, y \in B(x, \varepsilon)$  et un entier  $n \geq 0$  tels que :

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$$

Si petite soit la distance entre deux points initiaux, leurs orbites peuvent fortement diverger.

*exemple :* Le système dynamique  $\{[0, \infty); f(x) = 2x\}$  est sensible aux conditions initiales. En effet, comme  $|y - x|$  vaut au maximum  $\varepsilon$ , nous avons

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq 2^n \varepsilon$$

Il suffit donc de prendre

$$\delta < \min_{y \in B(x, \varepsilon)} |y - x| 2^n$$

Cela peut être un grand nombre même pour un  $n$  petit de l'ordre de la dizaine.

**Définition 1.13 :** Un système dynamique  $\{X; f\}$  est un *système dynamique chaotique* si

1. il est transitif.
2. il est sensible aux conditions initiales.

3. l'ensemble des orbites périodiques de  $f$  est dense dans  $X$ .

Les systèmes chaotiques possèdent un degré d'imprévisibilité à cause de cette dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales.

exemple : Illustrons le comportement chaotique par le diagramme du système  $f(x) = x^2 - 2$  sur l'intervalle  $[-2, 2]$  représenté sur la figure 1.4. Pour deux points initiaux proches  $x_0$  et  $x'_0$ , les orbites correspondantes divergent rapidement. Le caractère dense

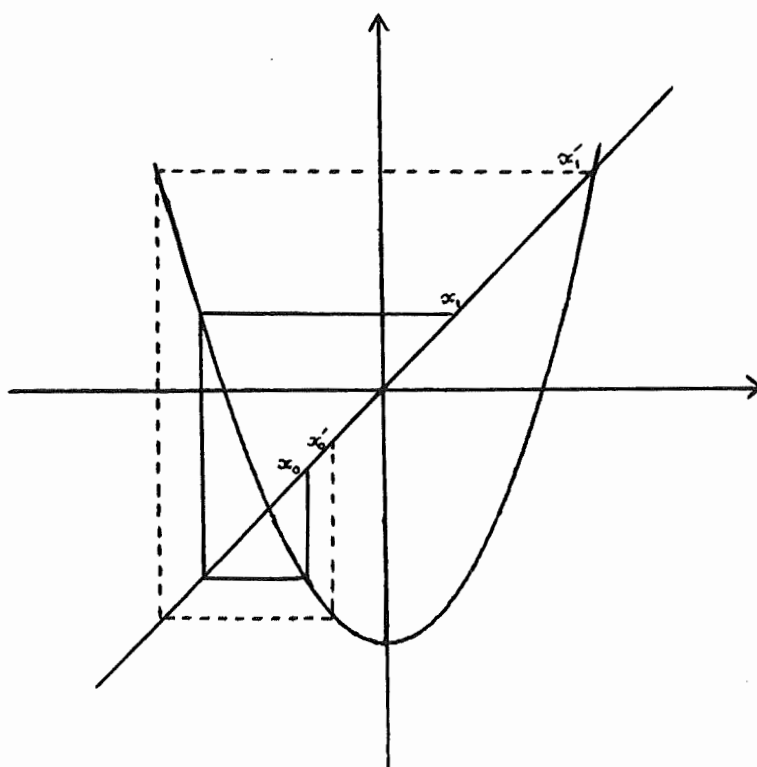


figure 1.4. comportement chaotique de  $f(x) = x^2 - 2$ .

d'un système chaotique s'illustre également dans un tel diagramme.

exemple : Soit le système dynamique  $\{[0, 1]; f(x) = \lambda x(1 - x)\}$  où  $\lambda$  est un paramètre réel. Pour la valeur  $\lambda = 3.79$ , le système a un comportement chaotique, par contre pour une valeur inférieure, le comportement est "régulier", comme nous le montre la figure 1.5.

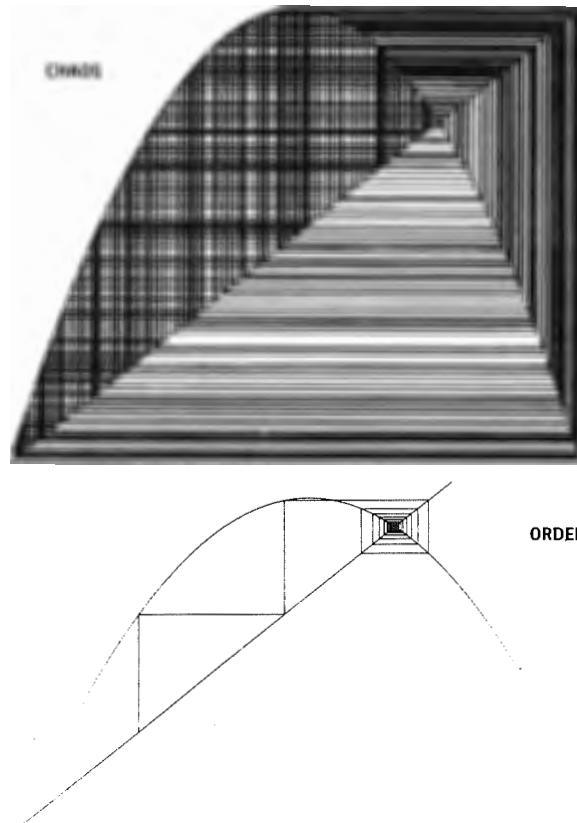


figure 1.5. chaos et ordre.

#### 1. 4. LES FRACTALES : GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE.

La géométrie fractale est un nouveau langage. Elle permet de décrire des formes naturelles comme la structure ramifiée d'une feuille, un nuage, aussi précisément qu'un architecte lorsqu'il décrit une maison.

Dans ce chapitre, nous poursuivons l'approche topologique pour aboutir à une définition formelle des fractales et de l'espace dans lequel elles vivent.

Nous commencerons par définir un espace métrique  $\mathcal{M}$  dont les éléments sont des sous-ensembles compacts non vides. Sous les bonnes conditions,  $\mathcal{M}$  est complet et des fractales y sont découvertes comme points fixes de certaines transformations désignées en anglais sous le nom de "Iterated function system (IFS)".

**Définition 1.14 :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet. Nous définissons  $\mathcal{M}(X)$  comme



étant l'espace dont les points sont des sous-ensembles compacts non vides de  $X$ .

En général, l'espace métrique complet  $(X, d)$  sera  $R^2$  muni de la distance euclidienne.

**Définition 1.15 :** Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet, un point  $x \in X$  et un ensemble  $B \in \mathcal{H}(X)$ . La *distance du point  $x$  à l'ensemble  $B$*  est définie par

$$d(x, B) = \min_{y \in B} \{d(x, y)\}$$

Ce minimum existe car  $B$  est compact non vide et  $d$  est continue, et toute application continue sur un compact atteint ses bornes.

**Définition 1.16 :** Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet, et deux ensembles  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ . La *distance de l'ensemble  $A$  à l'ensemble  $B$*  est définie par

$$d(A, B) = \max_{x \in A} \{d(x, B)\}$$

Ce maximum existe pour la même raison que celle citée précédemment dans la définition 1.15.

**Définition 1.17 :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet. La *distance de Hausdorff* entre deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{H}(X)$  est définie par

$$h(A, B) = \max \{d(A, B), d(B, A)\}$$

**Théorème 1.2 :**  $(\mathcal{H}(X), h)$  est un espace métrique complet. De plus, si  $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}_{n=0}^{\infty}$  est une suite de Cauchy, alors  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(X)$  peut se caractériser de la manière suivante :

$$A = \{x \in X : \exists \text{ une suite de Cauchy } \{x_n \in A_n\} \text{ convergente vers } x\}$$

preuve : La démonstration de ce théorème dépasse le cadre de ce mémoire dans la mesure où une étude approfondie de la topologie fractale ne constitue pas l'objet essentiel de mon travail. Je me contenterai alors d'en énoncer les idées principales :

Soient  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  une suite de Cauchy de  $\mathcal{H}(X)$  et  $A$  un ensemble de points de  $X$  défini comme dans l'énoncé du théorème. Comme un espace complet est un espace où toutes ses suites de Cauchy convergent vers un de ses points, nous devons montrer que  $A$  est la limite de  $\{A_n\}$ , non vide et compact. La preuve se divise alors en les parties suivantes :

1.  $A \neq \emptyset$
2.  $A$  est fermé et donc complet car  $X$  est complet.
3. pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $A \subset A_n + \varepsilon$
4.  $\lim A_n = A$ .  $\square$

Michael Barnsley désigne l'espace métrique complet  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  où  $h(d)$  est une notation pour indiquer que  $d$  est la métrique sous-jacente à la distance de Hausdorff, comme étant l'espace où vivent les fractales. Il définit alors une *fractale déterministe* comme un point fixe d'une transformation contractive sur  $(\mathcal{H}(X), h(d))$ . Ce point fixe sera appelé *attracteur*. Cette notion est le lien avec le chapitre suivant où nous aborderons les fractales sous l'aspect équation différentielle et dynamique chaotique grâce au concept d'attracteur étrange.

Les lemmes suivants nous montrent la manière de construire une application contractive sur  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  à partir d'une application contractive sur  $(X, d)$ .

**Lemme 1.1 :** Soit  $w : X \rightarrow X$ , une application contractive sur l'espace métrique  $(X, d)$  avec un facteur de contractivité  $s$ . Alors, l'application  $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  définie par

$$w(B) = \{w(x) : x \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

est contractive sur  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  de facteur de contractivité  $s$ .

**Lemme 1.2 :** Soient  $(X, d)$  un espace métrique, et  $\{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  des applications contractives sur  $(X, d)$  de facteurs respectifs  $s_n$  pour chaque  $n$ . L'application  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  définie par

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

est contractive de facteur  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .

Les démonstrations des deux lemmes et du théorème suivant sont disponibles dans le livre de Michael Barnsley.

Le dernier lemme nous fournit une méthode importante pour produire une application contractive sur  $(\mathcal{H}(X), h)$  par combinaison d'un certain nombre de contractions sur ce même espace, et donne lieu à la notion de système de fonctions itérées afin d'engendrer l'algorithme déterministe IFS pour générer des fractales.

**Définition 1.18 :** Un *système de fonctions itérées* consiste en un espace métrique complet  $(X, d)$  auquel est associé un ensemble fini d'applications contractives  $w_n : X \rightarrow X$  de facteurs respectifs  $s_n, n = 1, 2, \dots, N$ . Ce système se note  $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  et son facteur de contractivité  $s = \max\{s_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ . On utilise couramment l'abréviation IFS.

Nous en arrivons à la définition topologique d'une fractale déterministe par le théorème suivant :

**Théorème 1.3 :** Soit  $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  un IFS de facteur  $s$ . Alors, la transformation  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  définie par

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

est une application contractive sur l'espace métrique complet  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  de facteur  $s$ . Son unique point fixe  $A \in \mathcal{H}(X)$ , où

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

est tel que

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

**Définition 1.19 :** Le point fixe  $A \in \mathcal{H}(X)$  décrit ci-dessus, est appelé *attracteur de l'IFS* ou encore *fractale déterministe*.

Je ne vais pas m'attarder sur les considérations algorithmiques de cette méthode IFS, ce n'est pas mon objectif, ni développer en profondeur l'aspect topologique des fractales comme l'a fait Michael Barnsley. J'y reviendrai cependant pour parler de la manière de caractériser quantitativement les fractales par la notion de dimension.

Je termine cette partie par une illustration d'un IFS dont chaque application est une transformation affine et dont l'attracteur est un triangle appelé *triangle de Sierpinsky*.

exemple : Soit l'IFS  $\{R^2; w_n, n = 1, 2, 3\}$  défini par

$$w_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3.$$

où

i	a	b	c	d	e	f
1	0.5	0	0	0.5	1	1
2	0.5	0	0	0.5	1	50
3	0.5	0	0	0.5	25	50

Nous voyons sur la figure 1.6, les 2 premières applications sur l'ensemble initial  $A_0$ , à savoir  $W(A_0) = A_1, W^2(A_0) = A_2$ , avec

$$W(.) = w_1(.) \cup w_2(.) \cup w_3(.)$$

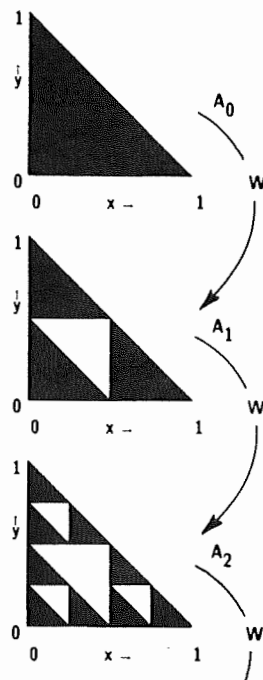


figure 1.6. premières itérations du triangle de Sierpinsky.

## 2. Une approche dynamique chaotique.

### 2. 1. INTRODUCTION.

L'origine de la théorie des systèmes dynamiques se confond avec la mécanique classique élaborée par Isaac Newton, mais cette branche de la théorie des équations différentielles ordinaires ne prend réellement son essor que depuis les travaux du mathématicien français Henri Poincaré, à la fin du siècle dernier.

Un système dynamique (déterministe) est un processus qui évolue dans le temps de manière déterministe, en ce sens que la connaissance exacte de son état initial permet de prédire son futur avec "certitude". Cependant, certains systèmes dynamiques complexes présentent le phénomène de dépendance sensitive des conditions initiales. Dans ce cas, si la connaissance de l'état initial du système est légèrement imprévue, les prédictions seront rapidement entachées d'une erreur considérable. De tels systèmes sont sources de chaos.

La représentation géométrique d'un système dynamique dans un espace abstrait appelé espace des phases, va nous permettre d'étudier qualitativement la notion d'attracteur, et plus particulièrement celle associée aux systèmes chaotiques : l'attracteur étrange, dont la structure géométrique est extrêmement enchevêtrée et comparable à une fractale. Les recherches sur les systèmes dynamiques visent essentiellement à caractériser les trajectoires dans l'espace des phases quand on les suit pendant un temps très long, voire infini.

### 2. 2. FRACTALES ET DYNAMIQUE : CHAOS DÉTERMINISTE ET ATTRACTEURS.

Le chaos, malgré son étymologie, ne signifie pas nécessairement le désordre absolu. Premièrement, et cela peut sembler paradoxal, le chaos, au sens envisagé ici, est déterministe et régi par des lois ne faisant intervenir aucun facteur aléatoire. Le comportement futur des systèmes chaotiques est entièrement déterminé par son passé, même si le phénomène de sensibilité aux conditions initiales limite la prévisibilité à long terme. Ensuite, comme nous allons le voir, des structures "élégantes" peuvent décrire un comportement chaotique.

Le chaos est apparu lors de l'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Un système obéissant aux lois de la mécanique classique, le système solaire par exemple, peut être considéré comme un système dynamique : si nous connaissons les positions et les vitesses de toutes les planètes à un instant donné, les lois de la mécanique nous permettent de calculer les positions et les vitesses à tout instant ultérieur. Elles déterminent l'évolution dans le temps des coordonnées caractérisant le système.

### 2.2.1 Systèmes dynamiques et équations différentielles.

Nous avons déjà défini un système dynamique dans l'approche topologique mais sans faire intervenir explicitement le temps. Comme un système dynamique est un processus d'évolution temporelle, nous introduisons une définition mettant en évidence la dépendance du système par rapport au temps, et néanmoins compatible avec la première.

**Définition 2.1 :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Un *système dynamique* sur  $X$ , ou encore un *flot continu*, est un triplet  $(X, R, \Pi)$  où  $\Pi$  est une application de l'espace produit cartésien  $X \times R$  dans l'espace  $X$ , et satisfaisant aux propriétés suivantes :

1.  $\Pi(x, 0) = x \quad \forall x \in X$  (axiome de l'identité).
2.  $\Pi(\Pi(x, t_1), t_2) = \Pi(x, t_1 + t_2) \quad \forall x \in X, t_1, t_2 \in R$  (axiome du groupe).
3.  $\Pi$  est continue (axiome de la continuité).

Il est facile de montrer la cohérence entre cette définition et celle donnée dans la première partie. En effet, la transformation  $f : X \rightarrow X$  de la première définition et son orbite, c'est-à-dire la suite de ses itérées  $\{f^t(x)\}_{t=0}^{\infty}$ , peuvent se réécrire en fonction de l'application  $\Pi : \forall x \in X$ ,

$$\begin{aligned}\Pi(x, 0) &= f^0(x) = x \\ \Pi(x, 1) &= f(x) \\ \Pi(x, 2) &= f^2(x) \\ &\dots\end{aligned}$$

et en général,

$$\Pi(x, t) = f^t(x) \quad \forall t \in N$$

et

$$\Pi(\Pi(x, t_1), t_2) = f^{t_1+t_2}(x)$$

car

$$\Pi(x, t_1) = f^{t_1}(x) \text{ et } \Pi(f^{t_1}(x), t_2) = f^{t_2}(f^{t_1}(x)) \quad t_1, t_2 \in N.$$

et en particulier,

$$f^{t+1}(x) = f(f^t(x)) \Leftrightarrow \Pi(x, t+1) = \Pi(\Pi(x, t), 1) \quad \forall t \in N$$

Dans la première définition, nous discrétisons en quelque sorte le temps.

Dans l'optique qui nous préoccupe maintenant, nous représentons un tel système par une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans l'espace métrique des réels, soit :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

où  $x(t) \in R^n$  et  $f : R^n \rightarrow R^n$  est continue. Supposons que pour tout  $x \in R^n$ , une solution unique de ce système existe, soit  $\varphi(t, x)$  appelée flot, et satisfaisant à  $\varphi(0, x) = x$ , la condition initiale. Nous pouvons montrer que l'unicité de la solution implique

$$\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x) \quad \forall t_1, t_2 \in R$$

De plus,  $\varphi$  est continue. L'application  $\Pi : R^n \times R \rightarrow R^n : (x, t) \mapsto \Pi(x, t) = \varphi(t, x)$  définit bien un système dynamique sur  $R^n$ .

**Remarque :** Nous pouvons également envisager la représentation d'un système dynamique par un flot non autonome lorsque  $f : R \times R^n \rightarrow R^n$ , continue, dépend explicitement du temps, soit

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$

où  $x(t) \in R^n$  et  $t \in R$ . Dès lors, si nous supposons que pour tout couple  $(t_0, x_0) \in R \times R^n$ , le système possède une solution unique  $\varphi(t, t_0, x_0)$  définie pour tout  $t \in R$ , avec  $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ , alors nous pouvons montrer que l'application  $\Pi : R \times R^n \times R \rightarrow R \times R^n$  où  $\Pi((t, x), s) = (s + t, \varphi(s + t, t, x))$ , détermine un système dynamique sur  $X = R \times R^n$ . En outre, le système est équivalent au système autonome de  $R^{n+1}$

$$\frac{dy}{dt} = g(y)$$

où  $y = (t, x)$  et  $g(y) = (1, f(y))$ .

### 2.2.2 Espace des phases et attracteurs.

Un système dynamique comporte deux aspects : son état, c'est-à-dire les informations qui le caractérisent, et sa dynamique, c'est-à-dire la loi qui caractérise l'évolution de l'état du système en fonction du temps. A un instant donné, l'état du système, ou encore les coordonnées, appelées également degrés de liberté, se représente par un point dans un espace abstrait : l'espace des phases, de dimension finie  $N$  si le système est décrit par  $N$  variables. Cet espace sert à représenter l'évolution des systèmes dynamiques. Nous définissons donc un espace des phases de la manière suivante :

**Définition 2.2 :** L' *espace des phases* est un espace dont les axes de coordonnées correspondent aux différents degrés de liberté caractérisant le mouvement du système.

**Définition 2.3 :** L'espace  $X$  sur lequel a été défini précédemment l'application  $\Pi$ , est l'espace des phases du système dynamique  $(X, R, \Pi)$ .

La nature des coordonnées de cet espace varie selon le contexte : pour un système mécanique, les coordonnées seront la position et la vitesse, pour un chimiste, elles peuvent représenter les concentrations de réactif, pour un biologiste, le nombre d'individus d'une population animale. Tous ces phénomènes sont abordés avec le langage commun des systèmes dynamiques, un langage abstrait et donc universel.

La plupart du temps, le flot n'est pas intégrable, l'espace des phases est alors un outil d'analyse efficace pour prévoir le comportement d'un système non linéaire, car la représentation des trajectoires fait apparaître le comportement du système sous une forme géométrique.

Nous pouvons illustrer l'intérêt de cet outil sur un exemple typique de la mécanique : le pendule simple, système dynamique dont l'état à un instant donné est complètement déterminé dès que l'on connaît la position et la vitesse. Pour ce système, l'espace des phases est  $R^2$  avec la position du pendule en abscisse et la vitesse en ordonnée. L'état du système évolue conformément à la relation fondamentale de la dynamique, dont l'expression mathématique est l'équation différentielle suivante :

Par la relation de Newton, force = masse \* accélération,

$$F = ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

ou encore,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$



où  $m$  est la masse du pendule,  $l$  sa longueur,  $g$  l'accélération gravifique et  $\theta(t)$  l'angle à l'instant  $t$  entre  $\vec{Om}$  et la verticale  $\vec{OR}$ , comme cela est représenté sur la figure 2.1.

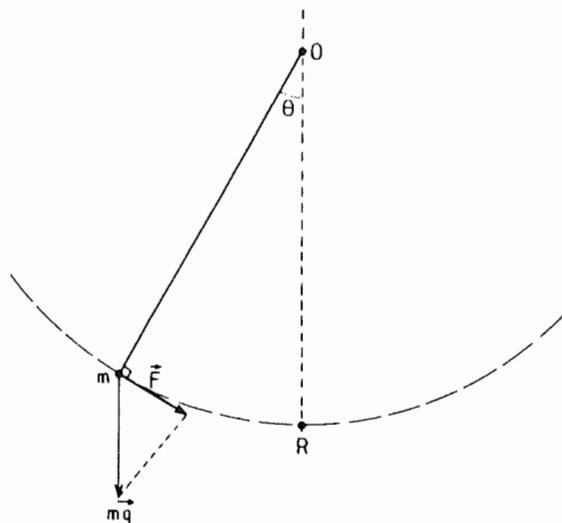


figure 2.1. le pendule simple.

Sans entrer dans les détails de la résolution de l'équation différentielle, en approximant linéairement  $\sin \theta$  par  $\theta$  (l'angle reste petit), et en choisissant des conditions initiales, nous obtenons le résultat classique

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

où  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  est la fréquence angulaire,  $\phi$  est la phase, et  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  est la période.

Le mouvement de va-et-vient du pendule correspond, dans l'espace des phases, au déplacement représentatif de l'état et décrit une courbe appelée *trajectoire*. Pour un pendule idéal comme ci-dessus, sans frottement, la trajectoire est une courbe fermée. Nous pouvons observer un tel comportement sur la figure 2.2.

Par contre, comme nous le voyons sur la figure 2.3, pour un pendule réel, où les frottements diminuent l'amplitude des oscillations (nous devons alors rajouter un terme proportionnel à la vitesse dans l'équation du mouvement), la trajectoire est une spirale dont le centre représente la position finale du pendule, une position d'équilibre puisque le pendule s'immobilise.

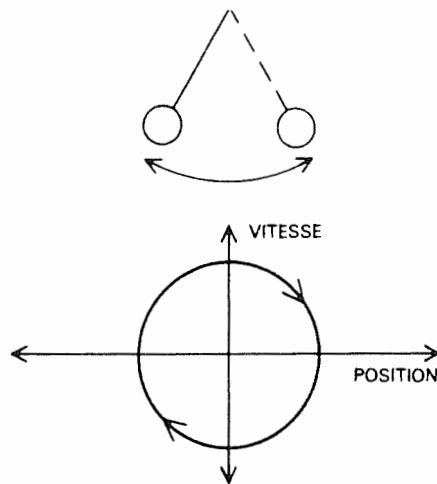


figure 2.2. une courbe fermée, trajectoire du pendule idéal.

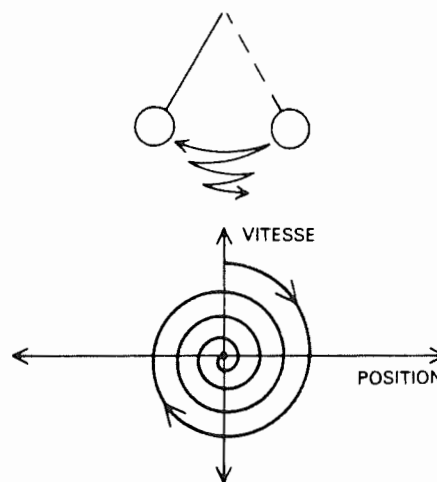


figure 2.3. une spirale, trajectoire d'un pendule avec frottements.

Cet exemple va nous amener à introduire les concepts nécessaires pour rejoindre la théorie sur les objets fractals développée précédemment, et aboutir au sujet de cette sec-

tion, en nous interrogeant sur la forme et les propriétés asymptotiques des trajectoires dans l'espace des phases. Comment se comportera le système considéré si l'on attend assez longtemps ? Atteindra-t-il un état figé ? Adoptera-t-il un comportement périodique ou "chaotique" ?

Pour le pendule oscillant avec une perte d'énergie, le mouvement se représente dans l'espace des phases par une spirale qui convergera toujours vers le point final de la trajectoire, un point fixe, et cela pour toutes les spirales décrivant le mouvement du pendule. Ce point fixe, position d'équilibre stationnaire, est un attracteur.

Le point d'équilibre stationnaire, c'est-à-dire le point  $x(t)$  pour lequel  $\frac{dx}{dt} = 0$ , est bien un point fixe au sens défini dans l'approche topologique. En effet, si  $\frac{dx}{dt}$  est nul, la solution et donc le flot  $\varphi(t, x)$  est une constante, quel que soit  $t \in R$ . Pour la condition initiale  $\varphi(0, x) = x$ , nous avons alors

$$\varphi(t, x) = x = \Pi(x, t) \quad \forall t \in R$$

en particulier, pour  $t \in N$  et  $t = 1$ ,

$$\varphi(1, x) = \Pi(x, 1) = x = f(x)$$

puisque  $\Pi(x, t) = f^t(x) \quad \forall t \in N$ , où  $f$  est la transformation utilisée dans la définition 1.7 d'un système dynamique.

Dans un cas plus général, pour tous les systèmes dynamiques où se présentent des phénomènes de frottement, les trajectoires dans l'espace des phases tendent vers une petite région de dimension inférieure à celle de l'espace des phases complet. Cette région est appelée *attracteur*.

Mais certains systèmes peuvent ne jamais s'immobiliser, leur comportement est périodique, il se répète indéfiniment de la même manière au cours du temps. Leurs trajectoires dans l'espace des phases convergent alors vers une courbe fermée et bornée appelée *cycle limite*, un deuxième type d'attracteur de système régulier.

Nous pouvons illustrer un cycle limite sur la figure 2.4, où deux trajectoires partant de points initiaux distincts  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , convergent asymptotiquement vers le même cycle limite.

Comme c'était le cas pour le point fixe, un cycle limite  $C$  reste invariant par le flot  $\phi$  (solution du système), c'est-à-dire  $\phi C = C$ . Si nous prenons comme condition initiale un point appartenant à  $C$ , ce point au cours du temps ne quittera jamais ce cycle.

Rappelons qu'un même système dynamique fournit plusieurs trajectoires ou orbites selon la condition initiale. Cette dernière détermine la constante d'intégration dans le cas

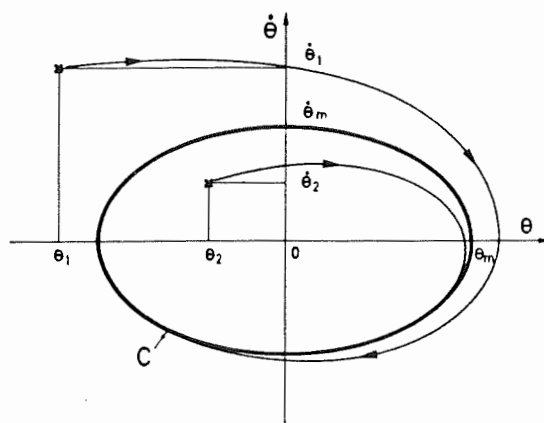


figure 2.4. attraction vers un cycle limite.

où le système se présente sous la forme d'une équation différentielle ordinaire. Par contre, elle constitue le premier terme  $x_0$  de la récurrence  $x_{n+1} = f(x_n)$  lorsque l'orbite est définie par la suite d'itérées  $\{f^n(x) = f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ , où  $f$  est la transformation caractérisant le système dynamique.

Il existe un troisième type d'attracteur simple, l'attracteur torique intervenant dans les systèmes quasi-périodiques, où le mouvement résulte de la composition de deux oscillations indépendantes. Mais dans le cadre de ce travail, je ne me contenterai que de le citer.

Nous pouvons résumer ce qui précède en donnant une définition intuitive mais encore fort peu rigoureuse mathématiquement d'un attracteur. Nous en donnerons une définition plus formelle dans la suite de ce chapitre.

**Définition 2.4 :** Pour un système dynamique donné, un *attracteur* est une région de l'espace des phases qui possède une dimension inférieure à celle de cet espace, et vers laquelle tendent les trajectoires du système.

Certains systèmes possèdent plusieurs attracteurs différents. Les trajectoires de ces systèmes convergent vers l'un ou l'autre de ces attracteurs dans l'espace des phases, selon les conditions initiales.

**Définition 2.5 :** Pour un système dynamique donné et pour un attracteur bien spécifié de ce système, le *bassin d'attraction* de l'attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases, déterminés géométriquement par les conditions initiales et qui donnent des

trajectoires évoluant vers l'attracteur considéré.

Selon le bassin dans lequel elle est située, une trajectoire convergera vers l'attracteur correspondant. Nous pouvons représenter schématiquement un attracteur et son bassin d'attraction sur la figure 2.5 où A est l'attracteur, B son bassin d'attraction et les trajectoires issues des points initiaux  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  convergent vers A.

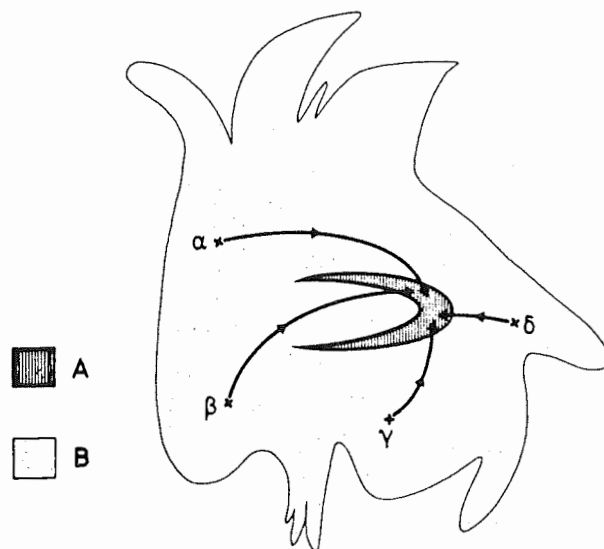


figure 2.5. représentation schématique d'un attracteur et de son bassin d'attraction.

Les frontières entre les bassins d'attraction respectifs peuvent présenter un comportement complexe, et en particulier, elles contiennent souvent des trajectoires chaotiques. En fait, ces frontières se révèlent être des fractales. Nous pouvons le remarquer sur un exemple simple unidimensionnel pour lequel la frontière entre deux bassins d'attraction est un objet fractal classique appelé *ensemble de Cantor*.

*exemple :* Considérons le système dynamique défini par la transformation  $f$  sur l'espace métrique  $R$ , soit  $f : R \rightarrow R : x \mapsto f(x)$ , linéaire par morceaux et dont le graphe est représenté sur la figure 2.6, dans le système de coordonnées  $(x_n, x_{n+1})$ ,  $n \geq 0$ , où  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Un tel diagramme permet de déterminer facilement l'orbite d'un point  $x = x_0$ , c'est-à-dire la suite des itérées  $\{x_n = f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ .

Ce système dynamique possède deux attracteurs,  $x = +\infty$  et  $x = -\infty$ . En effet, nous pouvons écrire  $x_{n+1} = f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(x_n)$ , la récurrence nous fournit la suite

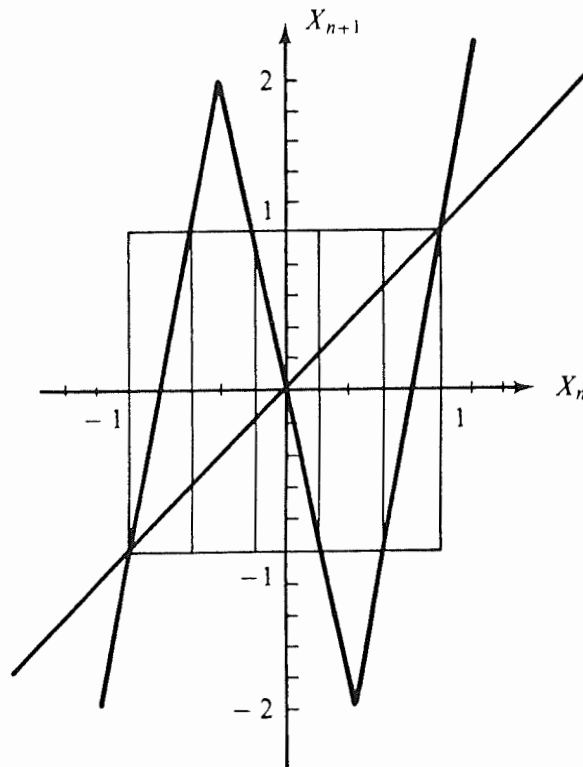


figure 2.6.

des itérées qui constitue l'orbite. Pour tout point  $x_n > 1$ , cette récurrence peut s'exprimer par

$$x_{n+1} = 5x_n - 4$$

En suivant la même procédure d'analyse graphique que celle déjà expliquée dans la première partie, nous observons que toute condition initiale  $x_0 > 1$  génère une trajectoire qui tend asymptotiquement vers  $+\infty$ . L'ensemble  $\{x : x > 1\}$  est donc le bassin d'attraction de l'attracteur  $x = +\infty$ . Par symétrie, nous pouvons dire de même pour l'ensemble  $\{x : x < -1\}$  qu'il représente le bassin d'attraction de l'attracteur  $x = -\infty$ .

Nous observons également que les points  $x \in ]0.2, 0.6[$  (respectivement  $] -0.6, -0.2[$ ) après une itération, arrivent dans le bassin d'attraction de  $x = -\infty$  (respectivement  $x = +\infty$ ). Si nous notons par  $1+$  (respectivement  $1-$ ) l'intervalle appliqué dans  $\{x : x > 1\}$  (respectivement  $\{x : x < -1\}$ ), l'intervalle  $[-1, 1]$  peut se décomposer comme :



Il reste donc les trois intervalles ouverts  $] - 1, -0.6[$ ,  $] - 0.2, 0.2[$  et  $] 0.6, 1[$ .

Si nous continuons la construction, nous trouvons de nouveau trois intervalles ouverts qui sont appliqués dans  $1+$  en une itération et donc dans le bassin  $\{x : x > 1\}$  en deux itérations, à savoir :

$$]- \frac{23}{25}, -\frac{21}{25}[ \quad ] \frac{1}{25}, \frac{3}{25}[ \quad ] \frac{17}{25}, \frac{19}{25}[$$

De même, nous avons trois intervalles ouverts appliqués dans  $1-$  en une itération et donc dans le bassin  $\{x : x < -1\}$  en deux itérations :

$$]- \frac{19}{25}, -\frac{17}{25}[ \quad ] -\frac{3}{25}, -\frac{1}{25}[ \quad ] \frac{21}{25}, \frac{23}{25}[$$

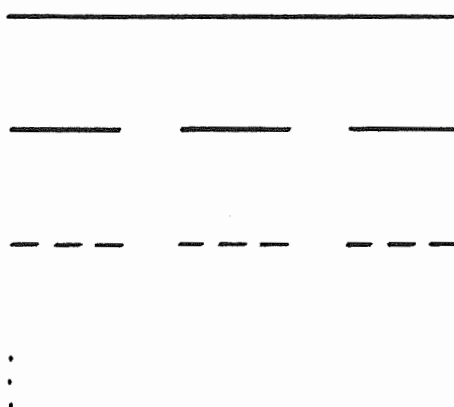
Si nous appelons ces intervalles respectivement  $2+$  et  $2-$ , nous avons alors la décomposition suivante :



Donc, la frontière entre les deux bassins d'attraction doit appartenir à l'intervalle  $[-1, 1]$ , mais ne peut contenir aucun des intervalles  $1+$ ,  $1-$ ,  $2+$  ou  $2-$ .

Si nous continuons la division des intervalles, nous pouvons conclure que la frontière entre les deux bassins d'attraction constitue un ensemble de Cantor, un objet fractal, puisque la division des intervalles en trois se répète à chaque itération.

Nous reparlerons de cet ensemble lorsque nous aborderons la notion de dimension fractale.



construction de l'ensemble de Cantor.

Dans la plupart des cas, les attracteurs observés sont généralement associés à un système dynamique dissipatif, à l'instar de l'oscillateur harmonique amorti (système où l'énergie se dissipe, par opposition à un système conservatif où l'énergie est invariante, comme dans le cas du pendule idéal). Les trajectoires de tels systèmes convergent asymptotiquement dans l'espace des phases vers un cycle limite ou un point fixe. Ces systèmes possèdent une propriété qui se révélera d'une importance considérable pour établir le lien entre les fractales et le concept d'attracteur étrange, grâce à une quantité mesurable appelée dimension fractale :

**Propriété de contraction des aires ou des volumes :**

*Dans l'espace des phases, pour un système dissipatif, l'aire de tout ensemble de conditions initiales diminue au cours du temps. Il s'agit évidemment d'un volume si la dimension de l'espace des phases est 3. Par contre, dans les systèmes conservatifs, l'aire et le volume se conservent.*

Ceci peut se comprendre aisément sur la figure 2.7 où la région  $\Gamma$  délimitant un ensemble de positions initiales de trajectoires, se réduit à une ligne lorsque l'attracteur  $C$ , un cycle limite, est atteint. La région  $\Gamma$  acquiert donc une aire nulle.

Il s'ensuit par ce phénomène de contraction d'aire ou de volume, une perte d'information concernant la position des points initiaux contenus dans  $\Gamma$ . Lorsque l'attracteur est atteint, l'information est irrémédiablement perdue.

En outre, nous pouvons conclure que la dimension  $d$  d'un attracteur est strictement inférieure à la dimension  $n$  de l'espace des phases, c'est-à-dire au nombre de degrés de



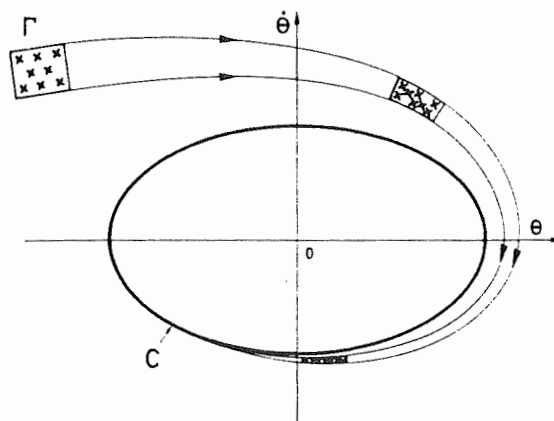


figure 2.7. contraction des aires pour un système dissipatif.

liberté du système dynamique. Nous avons donc  $d < n$ . En effet, si nous reprenons la figure précédente, deux coordonnées  $\theta$  et  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  sont nécessaires pour caractériser l'état du système dynamique, la dimension de l'espace des phases est donc 2. Lorsque le régime asymptotique est atteint, une seule trajectoire reste : le cycle limite  $C$ , qui est ici une courbe. Il suffit alors d'une coordonnée curviligne le long de  $C$  pour localiser un point, et donc un seul degré de liberté. L'attracteur a bien une dimension inférieure à celle de l'espace des phases.

Nous pouvons à présent définir plus formellement la notion d'attracteur en généralisant ce dont nous avons parlé à propos du cycle limite.

**Définition 2.6 :** Dans l'espace des phases, la solution d'un système d'équations différentielles ordinaires constitue un flot  $\phi$  qui pour un système dissipatif, possède un attracteur. Un *attracteur*  $A$  est un ensemble compact dans l'espace des phases satisfaisant aux propriétés suivantes :

1.  $A$  est invariant sous l'action du flot :  $\phi A = A$ .
2. le volume de  $A$  est nul dans l'espace des phases de dimension  $n$ .
3.  $A$  est contenu dans un domaine  $B$ , dont le volume est non nul et qui constitue son *bassin d'attraction*, c'est-à-dire l'ensemble des points initiaux des trajectoires convergeant vers  $A$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Remarquons que même si la structure géométrique de  $A$  semble simple, celle de  $B$  peut présenter une forme complexe comme nous avons pu le constater sur l'exemple de l'ensemble de Cantor.

### 2.2.3. Attracteurs étranges.

Jusque maintenant, nous n'avons vu que des attracteurs d'une géométrie assez simple et reflétant une dynamique pas trop complexe associée soit à un régime stationnaire pour le point fixe, soit à un régime périodique pour le cycle limite et quasi-périodique pour le tore.

Mais pour de nombreux systèmes, malgré leur simplicité et leur petit nombre de degrés de liberté, le comportement est apparemment aléatoire et aucun des attracteurs vus précédemment ne permet de les décrire. Ces attracteurs chaotiques sont appelés *attracteurs étranges*. Leur comportement aléatoire s'explique par le fait que des perturbations microscopiques s'amplifient et produisent rapidement de grandes modifications macroscopiques. Deux trajectoires issues de points voisins ne restent proches l'une de l'autre que pendant un court instant et ensuite divergent de façon exponentielle. Cette propriété de sensibilité aux conditions initiales caractérise les attracteurs étranges et s'illustre sur la figure 2.8.

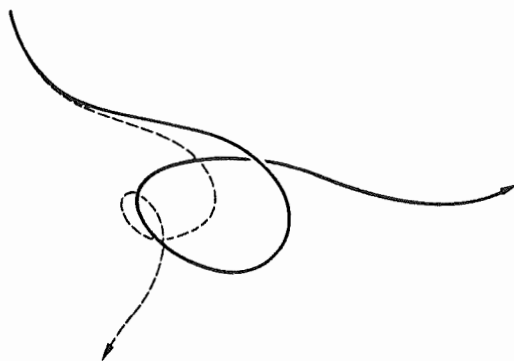


figure 2.8. divergence et sensibilité aux conditions initiales.

Ou encore, dans le cas des mouvements d'une bille de billard idéale, ceux-ci correspondent au trajet d'un rayon lumineux : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Si on lance deux billes dans deux directions légèrement différentes, après plusieurs chocs

contre les obstacles intérieurs, les billes évoluent de manière très différente comme nous pouvons le remarquer sur la figure 2.9.

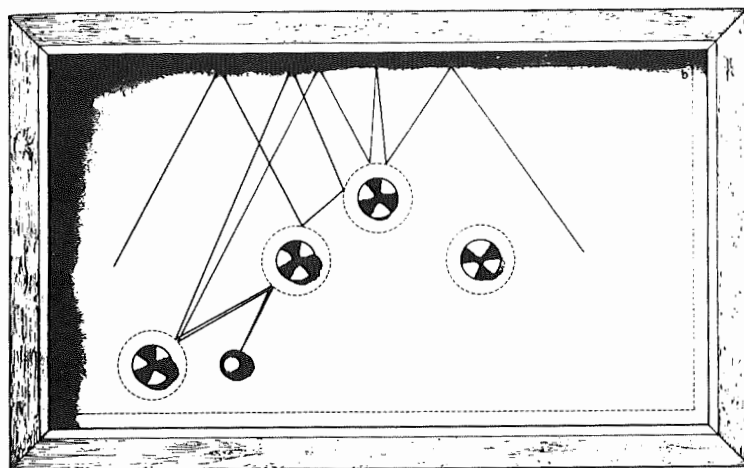


figure 2.9. divergence dans les mouvements d'une bille de billard.

La divergence au cours du temps de trajectoires initialement voisines apparaît encore plus nettement sur l'attracteur étrange découvert par Lorenz. Un nuage constitué de 1000 points initiaux semble ponctuel. Mais au fur et à mesure que le système évolue, les points du nuage se dispersent dans tout l'attracteur. L'état final peut se trouver n'importe où, et il est impossible de prévoir dans ce cas l'évolution du système.

L'idée d'un attracteur étrange n'est pas du tout intuitive, elle est même paradoxale, dans la mesure où il semble contradictoire d'avoir simultanément d'une part une attraction, c'est-à-dire une convergence asymptotique des trajectoires, et d'autre part la sensibilité aux conditions initiales impliquant la divergence de ces mêmes trajectoires. En fait, une opération simple d'étirement et de repliement dans l'espace des phases permet de mieux comprendre le principe du comportement chaotique. La divergence des trajectoires est locale, et deux trajectoires ne peuvent diverger indéfiniment car la dimension de l'attracteur est finie. Elles doivent donc se rapprocher tôt ou tard, et rester dans un espace borné. L'attracteur constitue une structure se repliant sur elle-même.

Nous illustrons sur la figure 2.11 les étapes dans la construction d'un attracteur étrange.

Dans un premier temps, les trajectoires divergent, cela correspond à un étirement latéral dû à la dépendance sensitive des conditions initiales. Ensuite, l'objet se replie sur lui-même :  $AB$  est connecté à  $A'B'$ . Le processus d'étirement et de repliement se répète

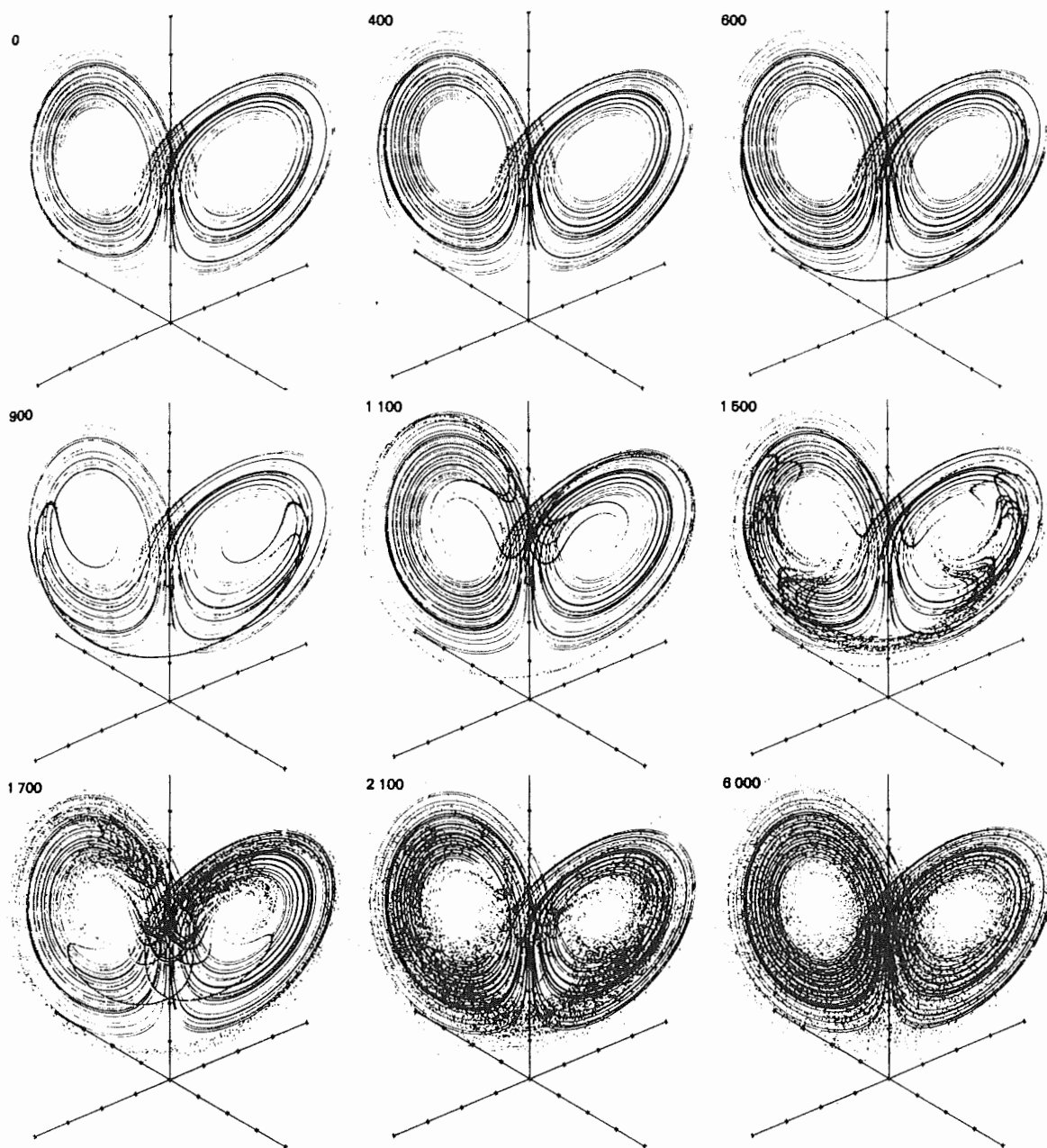


figure 2.10. dispersion dans l'attracteur de Lorenz.

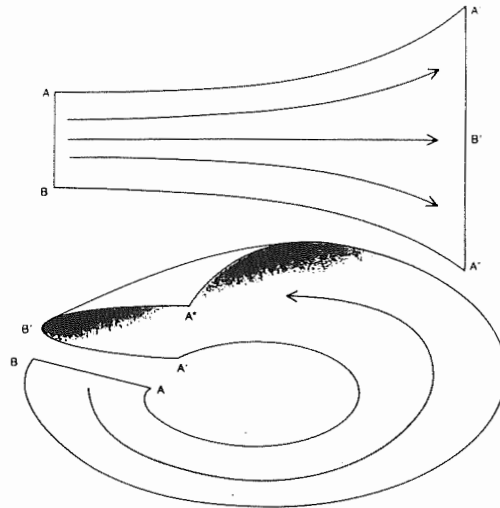


figure 2.11. construction d'un attracteur étrange.

à l'infini et fait apparaître un nombre infini de plis imbriqués les uns dans les autres, comme sur la figure 2.12.

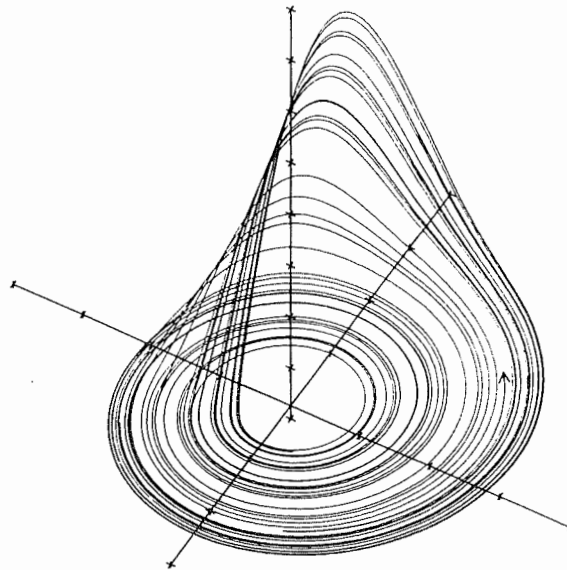


figure 2.12. attracteur étrange de Rossler.

Les attracteurs étranges sont donc des objets dont la structure apparaît d'autant plus détaillée mais identique ou semblable que le grossissement est plus important. Les attracteurs étranges sont des fractales !

En outre, nous avons déjà vu précédemment que par la propriété de contraction des aires ou des volumes, l'attracteur a une dimension  $d$  strictement inférieure à celle de

l'espace des phases. Si la dimension de ce dernier est 3, nous avons  $d < 3$ . Mais par la dépendance sensitive aux conditions initiales et la divergence des trajectoires,  $d$  doit être strictement supérieure à 2, soit  $d > 2$ . Les attracteurs étranges ont donc une dimension non entière ( $2 < d < 3$ ), appelée *dimension fractale*.

Finalement, nous rejoignons bien l'approche topologique abordée dans la première partie, où une fractale déterministe se définissait comme l'attracteur d'un système de fonctions itérées. L'espace métrique  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  serait l'espace des phases, et la contractivité de l'application  $W$  traduirait le phénomène de contraction des aires.

### 3. La dimension fractale.

#### 3. 1. L'IDÉE D'UNE DIMENSION NON ENTIÈRE.

Comment pouvons-nous caractériser quantitativement une fractale, déterminer sa "grandeur", sa "taille", la manière dont elle occupe l'espace ?

Une fractale est une figure géométrique ou un objet naturel dont la forme est soit fortement irrégulière, soit interrompue et fragmentée. Elle se caractérise par une quantité appelée *dimension fractale*, et qui est un nombre mesurant son degré d'irrégularité et de brisure. Dans le cas des objets de la géométrie usuelle d'Euclide, ce nombre se réduit à leur dimension traditionnelle topologique, et donc à une valeur entière. Par contre, la dimension d'une fractale peut être soit fractionnaire, soit irrationnelle.

Pour comprendre de manière intuitive l'idée d'une dimension non entière, nous reprenons l'exemple de Benoît Mandelbrot concernant la mesure de la longueur d'une côte maritime dans une région accidentée, en l'occurrence la Bretagne. La côte est une courbe située dans un espace borné, son extension spatiale est limitée. Cependant, elle est extrêmement sinueuse, sa longueur est donc supérieure à la distance en ligne droite entre ses extrémités. En outre, cette sinuosité se répète à toutes les échelles, et en choisissant des échelles de mesure de plus en plus petites et précises, la longueur de la côte tendra vers l'infini. Alors qu'une ligne de la géométrie euclidienne de longueur non nulle, et finie si elle se limite dans l'espace, est de dimension topologique 1, il est parfaitement logique de considérer qu'une ligne fractale possède une dimension fractale supérieure à 1 puisque sa longueur est infinie malgré son extension spatiale bornée, et inférieure à 2 car son aire est nulle.

Une fractale possède ainsi une dimension topologique  $D_t$ , notion usuelle de la géométrie classique et à valeur entière, et une dimension fractale  $D_f$  non nécessairement entière. Benoît Mandelbrot définit alors une fractale comme un ensemble ou un objet dont la dimension  $D_f$  est strictement supérieure à  $D_t$ .

Nous allons montrer comment il est possible de définir et de mesurer une dimension fractale. Des définitions diverses peuvent être envisagées selon l'aspect de la figure que l'on veut caractériser.

#### 3. 2. LES DIMENSIONS FRACTALES.

Avant d'introduire la dimension fractale, nous allons revoir le concept de dimension, sa signification, et développer une nouvelle définition basée sur la notion d'homothétie in-

terne et de similitude.

### 3.2.1. Dimension de similitude.

Si nous divisons un segment, un carré et un cube en des formes semblables mais de longueur de côté moitié, comme sur la figure 3.1, nous obtenons respectivement  $2^1$  petits segments,  $2^2$  petits carrés et  $2^3$  petits cubes. Les exposants 1, 2 et 3 coïncident dans chacun des cas avec la dimension de l'espace euclidien correspondant.

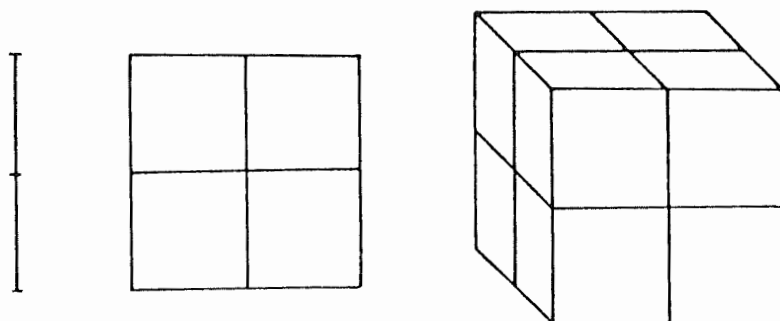


figure 3.1. division d'un segment, carré et cube.

Nous généralisons cette discussion de la manière suivante : si une figure se compose de  $a^D$  formes semblables de taille  $\frac{1}{a}$ , alors l'exposant  $D$  peut être défini comme sa dimension. Mais nous ne pouvons utiliser ce principe que pour des objets géométriquement simples et possédant une homothétie interne. Cette dimension est appelée *dimension de similitude* et se note  $D_s$ . Sa valeur ne se restreint pas aux entiers, si une figure se compose de  $b$  formes semblables de taille  $\frac{1}{a}$ , alors la dimension de similitude est donnée par

$$D_s = \frac{\log b}{\log a} \quad (\text{car } b = a^D)$$

Comme exemple, nous pouvons déterminer la dimension de similitude de la courbe de Von Koch illustrée sur la figure 3.2.

La courbe de Von Koch se construit en divisant un segment en quatre composantes de taille  $\frac{1}{3}$ , soit



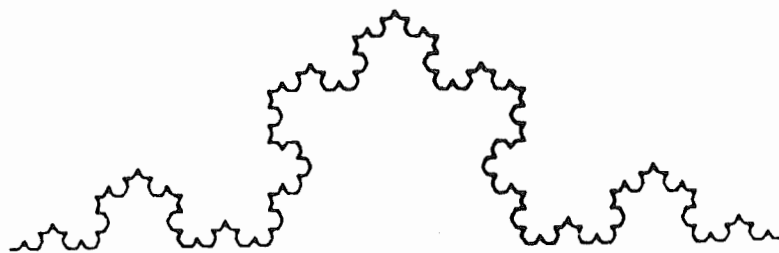


figure 3.2. courbe de Von Koch.



Notons que l'homothétie interne (de rapport  $\frac{1}{3}$  pour cet exemple) est suivie éventuellement d'une rotation ou d'une symétrie. La dimension de similitude de la courbe de Von Koch est donc

$$D_s = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618 \dots$$

Que signifie cette valeur irrationnelle pour une dimension ? Elle est supérieure à 1, qui est la dimension habituellement considérée pour une ligne, et la courbe de Von Koch a une structure plus compliquée que celle d'une simple ligne. Nous pouvons donc considérer la dimension  $D_s$  comme un indice de complexité géométrique de la figure concernée.

La dimension de similitude est une extension de la dimension empirique euclidienne. Cependant, elle ne s'utilise que pour des figures décomposables en formes semblables de taille plus petite. Son champ d'application est donc réduit, c'est pourquoi nous allons introduire une autre définition de la dimension, plus générale : la dimension de Hausdorff-Bésicovitch, première apparition de la dimension fractale.

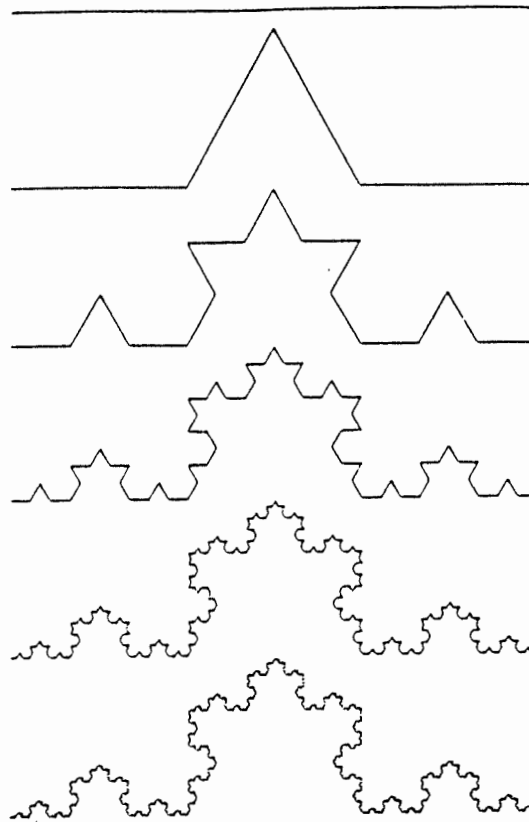


figure 3.3. étapes de la construction de la courbe de Von Koch.

### 3.2.2. Dimension de Hausdorff-Bésicovitch.

La dimension de Hausdorff-Bésicovitch caractérise la complexité géométrique de sous-ensembles bornés de l'espace métrique  $R^m$  muni de la norme euclidienne  $d$ . Elle se définit par une méthode de recouvrement.

**Définition 3.1 :** Soient  $D$  et  $\varepsilon$ , deux nombres réels tels que  $0 < D < \infty$  et  $0 < \varepsilon < \infty$ . Soient un ensemble  $A$  borné  $\subset R^m$  et  $r$ , le diamètre de  $A$  défini par

$$r = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Recouvrons l'ensemble  $A$  par un nombre infini dénombrable de sous-ensembles  $A_i$  de diamètre  $r_i < \varepsilon$ , soit  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Nous définissons la *mesure de Hausdorff* dans la

dimension  $D$  de  $A$  par l'expression

$$M_D(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{r_i < \epsilon} \sum_{i=1}^{\infty} (r_i)^D$$

Il peut être démontré par le théorème suivant que cette quantité ne prend que trois valeurs distinctes.

**Théorème 3.1 :** Soit  $m$ , un entier positif. Soit  $A$  un sous-ensemble borné de l'espace métrique  $(R^m, d)$ . Il existe un nombre réel unique  $D_H \in [0, m]$  tel que, pour  $D \in [0, \infty]$  :

$$M_D(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } D < D_H \\ 0 & \text{si } D > D_H \end{cases}$$

Ce théorème donne lieu à la définition de la dimension de Hausdorff-Bésicovitch.

**Définition 3.2 :** La dimension de Hausdorff-Bésicovitch de l'ensemble  $A$  est le nombre réel  $D_H$  intervenant dans le théorème 3.1.

Déterminer de manière rigoureuse la dimension de Hausdorff-Bésicovitch est généralement très difficile. Nous verrons, plus loin, un calcul de cette dimension sur l'exemple de l'ensemble de Cantor. Mais avant, essayons de comprendre intuitivement cette notion définie quelle que soit la forme de l'ensemble  $A$ , et qui généralise non seulement la dimension empirique mais également la dimension de similitude.

Considérons le recouvrement de la courbe de Von Koch par des cercles de diamètre  $r_i$ , comme illustré sur la figure 3.4.

Si les cercles ne se chevauchent pas de trop, nous pouvons approcher la longueur totale de la courbe par la somme de leurs diamètres, soit  $r_1 + r_2 + \dots + r_k$  ( $k$  valant 7 sur la figure). L'infimum de cette somme (pour des diamètres inférieurs à une valeur positive  $\epsilon$ ) garantit la petitesse des intersections entre les cercles. De même, comme l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré du diamètre, l'aire délimitée par la courbe de Von Koch est proportionnelle à  $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_k^2$ , et nous pouvons étendre le raisonnement de la même façon pour le volume.

Or, la longueur, l'aire et le volume sont respectivement les mesures usuelles dans la dimension 1, 2 et 3. Il semble alors naturel de généraliser cette discussion pour une dimension  $D$  quelconque : la mesure dans la dimension  $D$  d'une sphère de diamètre  $r$  est proportionnelle à  $r^D$ .

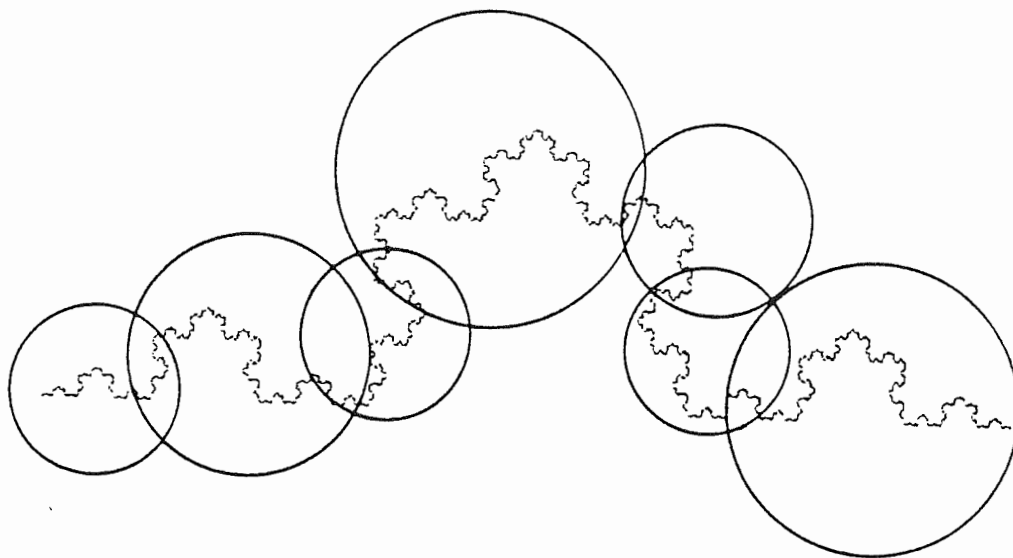


figure 3.4. recouvrement de la courbe de Von Koch.

C'est pourquoi, dans la définition de la mesure de Hausdorff, nous sommes la  $D^{\text{ième}}$  puissance de chaque diamètre  $r_i$ . La limite lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 nous assure alors de la convergence de la mesure de la figure approchée par le recouvrement des sphères, vers celle de l'ensemble initial considéré.

$D$  peut prendre une valeur fractionnaire ou même irrationnelle. Pour la courbe de Von Koch, il a été prouvé mathématiquement que la mesure dans la dimension 1, à savoir la longueur, diverge, et est nulle dans la dimension 2, tandis qu'elle prend une valeur finie pour  $D = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

Illustrons un calcul de la dimension de Hausdorff-Bésicovitch sur l'exemple suivant.

exemple : Déterminons la dimension de Hausdorff-Bésicovitch d'un ensemble de Cantor. Soit un ensemble d'intervalles fermés  $E_j$  tels que

$$E_0 = [0, 1]$$

$$E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

...

$E_j$  est l'ensemble des intervalles obtenus en éliminant le deuxième tiers de chaque intervalle de  $E_{j-1}$ .  $E_j$  est donc constitué de  $2^j$  intervalles de longueur  $\frac{1}{3^j}$ . Nous définissons  $E$ , l'ensemble de Cantor comme

$$E = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$$

$E$  est donc recouvert par un ensemble de  $E_j$ . De plus, remarquons que  $E_{j+1} \subset E_j$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . Dès lors,

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{j=0}^n E_j = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$$

Le nombre d'intervalles de longueur  $3^{-n}$  recouvrant  $E$  est de  $2^n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ainsi, la mesure de Hausdorff de  $E$  dans la dimension  $D$  satisfait à la relation

$$M_D(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (3^{-n})^D$$

pour un  $D$  particulier :  $D_H$ , la dimension de Hausdorff-Bésicovitch, cette mesure a une valeur finie  $c$  comprise entre 0 et l'infini. Soit,

$$2^n (3^{-n})^{D_H} = c \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers l'infini}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{2}{3^{D_H}} \right)^n = c$$

$$\Leftrightarrow n(\ln 2 - \ln 3^{D_H}) = \ln c$$

$$\Leftrightarrow D_H \ln 3 = \ln 2 - \frac{\ln c}{n}$$

$$\Leftrightarrow D_H = \frac{\ln 2}{\ln 3} - \frac{\ln c}{n \ln 3} \quad 0 < c < \infty$$

d'où, lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $D_H = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ . La dimension de Hausdorff-Bésicovitch de l'ensemble de Cantor est  $\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309 \dots$

Comme le calcul de la dimension de Hausdorff-Bésicovitch se révèle souvent d'une grande complexité, nous allons considérer une autre définition d'un usage plus pratique, de dimension non entière : la dimension de capacité ou de contenu.

### 3.2.3. Dimension de capacité.

Cette dimension a été suggérée par Kolmogorov et se base également sur une méthode de recouvrement.

**Définition 3.3 :** Soit un ensemble  $A$  compact d'un espace métrique  $X$ . Soient  $\varepsilon > 0$  et  $B(x, \varepsilon)$  une boule fermée de centre  $x \in A$  et de rayon  $\varepsilon$ . Soit  $N(A, \varepsilon)$ , le nombre minimum de boules fermées de rayon  $\varepsilon$  nécessaires pour recouvrir  $A$ , c'est-à-dire  $N(A, \varepsilon) =$  le plus petit entier positif  $M$  tel que  $A = \bigcup_{n=1}^M B(x_n, \varepsilon)$  pour un certain ensemble de points distincts  $\{x_n : n = 1, 2, \dots, M\} \subset X$ . La quantité définie par

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(A, \varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

est appelée *dimension de capacité* ou *de contenu* de l'ensemble  $A$ .

Contrairement à la dimension de Hausdorff-Bésicovitch, nous recouvrons l'ensemble  $A$  par des boules de même diamètre. Cependant, il existe une relation entre ces deux dimensions. Si nous considérons le recouvrement le plus efficace, c'est-à-dire avec un nombre minimum d'intersections entre les boules, la mesure de Hausdorff dans la dimension  $D$  de la figure  $A$  approchée est proportionnelle à

$$N(A, \varepsilon) \varepsilon^D$$

et pour un  $\varepsilon$  suffisamment petit, la définition de la dimension de capacité  $D_c$  est équivalente à la relation

$$N(A, \varepsilon) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{D_c}$$

la mesure dans la dimension  $D$  devient alors proportionnelle à

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{D_c} * \varepsilon^D$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, cette expression diverge si  $D < D_c$  car,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{D_c} * \varepsilon^D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{D_c - D}} = \infty$$

puisque  $D_c - D > 0$ . Par contre, elle converge vers 0 si  $D > D_c$ , car

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{D_c} * \varepsilon^D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{D-D_c} = 0$$

puisque  $D - D_c > 0$ . Nous retrouvons donc l'hypothèse du théorème 3.1 qui nous a permis de définir la dimension de Hausdorff-Bésicovitch  $D_H$ . La dimension de capacité peut donc être vue comme un cas particulier de la dimension de Hausdorff-Bésicovitch, lorsque les diamètres des boules (ou des ensembles) de recouvrement sont identiques. Ces deux dimensions coïncident souvent mais peuvent dans certains cas prendre des valeurs différentes. En fait, il peut être démontré que  $D_c \geq D_H$ .

Si nous reprenons l'exemple de l'ensemble de Cantor, nous avons immédiatement  $N(A, \varepsilon) = 2^n$  et  $\varepsilon = \frac{1}{3^n}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. D'où

$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} = D_H$$

Il est clair également que la dimension de capacité généralise la dimension de similitude  $D_s$ . Ces définitions de la dimension sont rigoureuses, et d'un point de vue mathématique, elles ne semblent poser aucun problème, si ce n'est parfois la difficulté de les calculer. Notre objectif ultérieur sera d'étudier certaines applications dans le domaine médical et notamment de déterminer la dimension fractale des vaisseaux de la rétine d'un être humain. Or, si nous nous reportons à la définition antérieure de cette dimension, il est nécessaire d'effectuer un passage à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Mais une "longueur nulle" ne correspond pas à un concept physique. Nous allons donc voir plusieurs méthodes récentes pour rendre ces définitions applicables en pratique et compatibles avec notre objectif. Ces méthodes sont

1. la méthode "box-counting".
2. la relation masse-rayon.
3. la fonction de corrélation.

Avant d'aborder ces méthodes, il convient de faire une remarque sur l'unicité des différentes dimensions que nous rencontrerons. Dans certains cas, les valeurs obtenues seront égales, mais dans d'autres, elles différeront, en sorte qu'il ne sera pas possible d'apporter une réponse générale à ce problème. C'est pourquoi, nous utiliserons le dénominateur de "dimension fractale" comme terme générique pour désigner les dimensions qui peuvent prendre des valeurs fractionnaires ou irrationnelles.

### 3.2.4. La méthode "box-counting".

La méthode se base sur la définition de la dimension de capacité, car elle consiste à recouvrir la figure de petits carrés (ou cubes si la dimension de l'espace métrique est 3) dont les côtés ont même longueur. Comme exemple, mesurons la dimension d'un ensemble de points dans un plan. Premièrement, nous divisons le plan en carrés dont la longueur des côtés est  $r$ . Ensuite, nous comptons le nombre de carrés contenant au moins un point de l'ensemble, soit  $N(r)$ . Si  $N(r)$  vérifie la relation  $N(r) \approx r^{-D}$  lorsque  $r$  varie, alors la distribution des points a une dimension fractale égale à  $D$ .

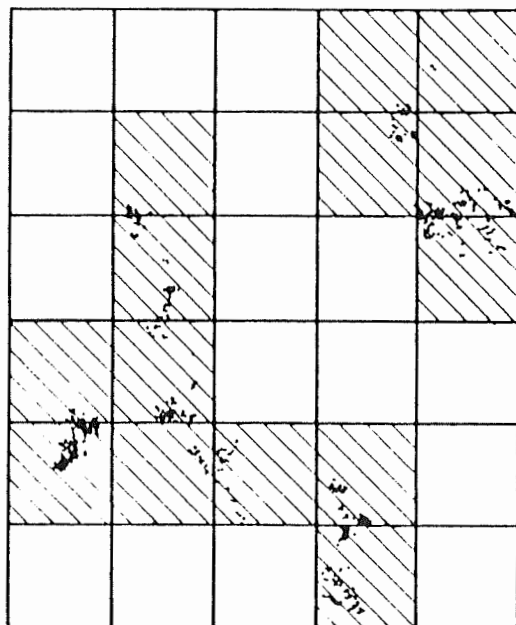


figure 3.5. recouvrement d'un ensemble de points dans un plan.

Nous pouvons garantir la validité de cette méthode grâce aux deux théorèmes suivants :

**Théorème 3.2 :** Soit  $A$ , un ensemble compact d'un espace métrique  $(X, d)$ . Soit  $\varepsilon_n = cr^n$  où  $c$  et  $r$  sont deux nombres réels tels que  $0 < r < 1$  et  $c > 0$ , et  $n = 1, 2, 3, \dots$



Si,

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon^n})}$$

alors  $D$  est la dimension fractale de capacité de  $A$ .

preuve : Soit l'ensemble  $E = \{\varepsilon_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ .  
Définissons  $f(\varepsilon) = \max\{\varepsilon_n \in E : \varepsilon_n \leq \varepsilon\}$  et supposons que  $\varepsilon \leq r$ . Dès lors,

$$f(\varepsilon) \leq \varepsilon \leq \frac{f(\varepsilon)}{r} \quad (1)$$

La première inégalité vient de la définition de  $f(\varepsilon)$ . La deuxième se démontre de la manière suivante :

Comme  $0 < r < 1$ ,  $\frac{f(\varepsilon)}{r} \geq f(\varepsilon)$ . En outre, par définition de  $f(\varepsilon)$ ,  $\exists k \in N \setminus \{0\}$  tel que  $f(\varepsilon) = \varepsilon_k = cr^k$  avec  $\varepsilon_k \geq \varepsilon_n \quad \forall n \in N \setminus \{0\}$ . Donc,

$$\frac{f(\varepsilon)}{r} = \frac{\varepsilon_k}{r} = cr^{k-1} = \varepsilon_{k-1}$$

Nous ne pouvons avoir

$$f(\varepsilon) \leq \frac{f(\varepsilon)}{r} < \varepsilon$$

c'est-à-dire  $\varepsilon_k \leq \varepsilon_{k-1} < \varepsilon$  (avec  $\varepsilon_k \neq \varepsilon_{k-1}$ ), car sinon,  $f(\varepsilon) = \varepsilon_k$  ne serait pas le  $\max\{\varepsilon_n \in E : \varepsilon_n \leq \varepsilon\}$ . Donc, la relation (1) est démontrée.

Nous avons également  $N(A, f(\varepsilon)) \geq N(A, \varepsilon) \geq N(A, \frac{f(\varepsilon)}{r})$  puisque, plus les boules ont un petit rayon, plus il en faudra pour recouvrir l'ensemble  $A$ . Comme  $\ln(x)$  est une fonction croissante de  $x$  pour  $x \geq 1$ , nous avons

$$\ln N(A, f(\varepsilon)) \geq \ln N(A, \varepsilon) \geq \ln N(A, \frac{f(\varepsilon)}{r}) \quad (2)$$

et de (1), nous déduisons  $\frac{1}{f(\varepsilon)} \geq \frac{1}{\varepsilon} \geq \frac{r}{f(\varepsilon)}$ , et donc

$$\ln \frac{1}{f(\varepsilon)} \geq \ln \frac{1}{\varepsilon} \geq \ln \frac{r}{f(\varepsilon)} \quad (3)$$

Les inégalités (2) et (3) impliquent que :

$$\frac{\ln N(A, \frac{f(\varepsilon)}{r})}{\ln \frac{1}{f(\varepsilon)}} \leq \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln N(A, f(\varepsilon))}{\ln \frac{r}{f(\varepsilon)}} \quad (4)$$

or,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, f(\varepsilon))}{\ln \frac{r}{f(\varepsilon)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{r}{\varepsilon_n}} \quad (5)$$

car si  $\varepsilon$  tend vers 0, alors  $f(\varepsilon)$  tend aussi vers 0. D'autre part,  $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$  est une suite décroissante et bornée inférieurement, donc, si  $n$  tend vers l'infini,  $\varepsilon_n$  converge vers son infimum, c'est-à-dire 0. Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{r}{\varepsilon_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln r + \ln \frac{1}{\varepsilon_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}} \end{aligned} \quad (6)$$

car le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers l'infini. Et de même, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \frac{f(\varepsilon)}{r})}{\ln \frac{1}{f(\varepsilon)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_{n-1})}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_{n-1})}{\ln \frac{1}{r} + \ln \frac{1}{\varepsilon_{n-1}}} \quad \text{car } \varepsilon_n = r\varepsilon_{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}} \end{aligned} \quad (7)$$

Finalement, par (4), (6) et (7), nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \varepsilon_n)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = D_c \quad \text{par définition.} \quad \square$$

**Théorème 3.3 :** Soit  $A$ , un ensemble compact de l'espace métrique  $R^m$  muni de la norme euclidienne. Recouvrons  $R^m$  par des "boîtes" fermées et juxtaposées (des carrés si  $m=2$ , des cubes si  $m=3$ ) dont les côtés ont une longueur  $(\frac{1}{2})^n$ , comme indiqué par exemple dans la figure 3.6 où  $R^2$  est recouvert par des carrés dont la longueur des côtés est  $\frac{1}{4}$ .

Soit  $N_n(A)$ , le nombre de "boîtes" ayant un côté de longueur  $\frac{1}{2^n}$  et qui ont une intersection non vide avec l'ensemble  $A$ . Si

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n(A)}{\ln 2^n}$$

alors,  $D$  est la dimension fractale de capacité de l'ensemble  $A$ .

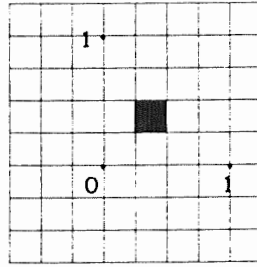


figure 3.6.

preuve : Pour toute valeur de  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , nous pouvons observer que :

$$2^{-m} N_{n-1}(A) \leq N(A, \frac{1}{2^n}) \leq N_{k(n)}(A) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

où  $N(A, \frac{1}{2^n})$  est le nombre minimum de boules fermées de rayon  $\frac{1}{2^n}$  nécessaires pour recouvrir  $A$ , et  $k(n)$ , le plus petit entier  $k$  satisfaisant à

$$k \geq n - 1 + \frac{\ln m}{2 \ln 2} \quad (9)$$

La première inégalité vient du fait qu'une boule de rayon  $\frac{1}{2^n}$  ne peut avoir d'intersection qu'avec au plus  $2^m$  "boîtes" de côté  $\frac{1}{2^{n-1}}$  (chacun des  $m$  côtés des  $N_{n-1}(A)$  "boîtes" est au moins deux fois plus grand que le rayon  $\frac{1}{2^n}$ ). La deuxième inégalité s'explique de la manière suivante :

Une "boîte" de côté  $s$  ne peut être incluse dans une boule de rayon  $r$ , que si  $r^2 \geq m (\frac{s}{2})^2$ , par le théorème de Pythagore, comme illustré sur la figure 3.7 dans le cas où  $m = 2$ .

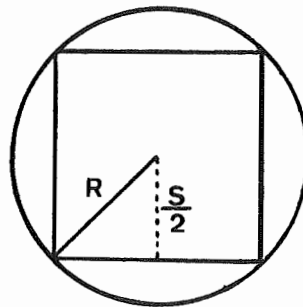


figure 3.7.

Donc, le nombre de "boîtes" de côté  $s$  sera plus grand que le nombre de boules de rayon  $r$  pour recouvrir l'ensemble  $A$ . Ainsi, avec  $s = \frac{1}{2^k}$  (pour  $N_{k(n)}$ ) et  $r = \frac{1}{2^n}$ , l'inégalité  $r^2 \geq m \left(\frac{s}{2}\right)^2$  est équivalente à :

$$\frac{1}{2^{2m}} \geq m \left( \frac{1}{2^{2k+2}} \right)$$

Comme  $\ln(x)$  est croissante, nous avons

$$\ln \frac{1}{2^{2m}} \geq \ln \left( m \frac{1}{2^{2k+2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow -2n \ln 2 \geq \ln m - (2k+2) \ln 2$$

$$\Leftrightarrow 2k \ln 2 \geq \ln m + 2n \ln 2 - 2 \ln 2$$

$$\Leftrightarrow k \geq \frac{\ln m}{2 \ln 2} + n - 1$$

ce qui correspond bien à la définition de  $k(n)$  vue ci-dessus.

Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{k(n)}}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{k(n)})}{\ln(2^n)} \frac{\ln(N_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} = D \quad (10)$$

car  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = 1$ , en effet :  $n \geq n - 1 + \frac{\ln m}{2 \ln 2}$  (pour  $m \leq 4$ ), mais nous ne pouvons avoir  $k(n) > n$  car sinon,  $k(n)$  ne serait pas le plus petit entier satisfaisant à la relation (9), donc  $n \geq k(n)$ , c'est-à-dire  $\frac{k(n)}{n} \leq 1$ . D'où,

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{\ln m}{2n \ln 2} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = 1$$

Nous avons également

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{-m} N_{n-1})}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_{n-1})}{\ln 2^{n-1}} = D \quad (11)$$

D'où, par (8), (10) et (11), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(A, \frac{1}{2^n})}{\ln 2^n} = D$$

Nous sommes donc dans les hypothèses du théorème 3.2, avec  $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ , nous pouvons alors conclure que l'ensemble  $A$  a la dimension fractale de capacité  $D_c = D$ .  $\square$

Cette méthode "box-counting" convient à un grand nombre d'applications, mais elle se révèle surtout d'un usage pratique et efficace pour déterminer la dimension fractale d'une image traitée par ordinateur, puisque un pixel de l'écran peut être considéré comme un carré de longueur de côté très petite. C'est la méthode que nous utiliserons pour analyser les vaisseaux de la rétine humaine à partir d'une angiographie digitalisée. Nos résultats seront comparés à ceux obtenus par les deux autres méthodes à savoir la relation masse-rayon et la fonction de corrélation.

### 3.2.5. La relation masse-rayon.

Pour un ensemble de points distribués dans l'espace, comme par exemple celui des étoiles dans l'univers, nous pouvons définir la dimension fractale de la manière suivante : soient une sphère de rayon  $r$  et  $M(r)$ , le nombre de points qu'elle contient.

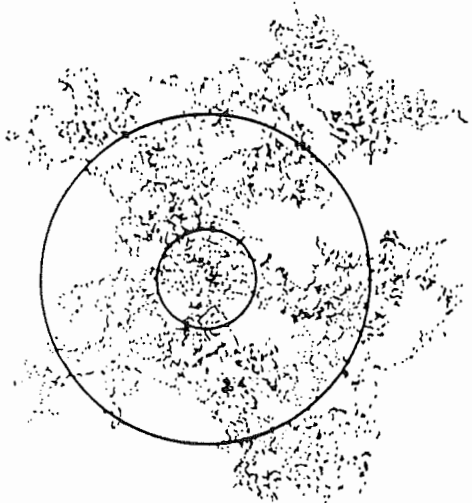


figure 3.8.

Si les points se situent sur une ligne droite et sont distribués uniformément, alors  $M(r)$  est proportionnelle à  $r$ , soit  $M(r) \propto r$ . Par contre, si la distribution se répartit sur un plan, alors  $M(r) \propto r^2$ , et de même pour un espace à trois dimensions,  $M(r) \propto r^3$ . Nous

pouvons dès lors généraliser ces relations et dire que si pour une distribution de points,  $M(r) \propto r^D$ , alors la dimension fractale de cette distribution est  $D$ .

$M(r)$  ne représente pas nécessairement un nombre de points. Si nous voulons déterminer la dimension de la distribution de la masse de l'univers par exemple, nous pouvons désigner par  $M(r)$ , la masse totale dans une sphère de rayon  $r$ .

Cette méthode diffère de la précédente dans la mesure où nous recouvrons la structure fractale non plus par un "grillage de boîtes" de même taille chacune comme dans la méthode "box-counting", mais par des sphères de taille croissante et toutes centrées en un même point. Elle est également appelée méthode "sandbox".

Pour estimer de manière suffisamment précise la dimension fractale, nous pouvons prendre la moyenne de tous les résultats obtenus en changeant la position du centre de chaque sphère. Cependant, une procédure plus simple, consiste à centrer les sphères au centre de masse de la distribution.

### 3.2.6. La fonction de corrélation.

Une des principales caractéristiques géométriques d'une fractale est l'auto-similitude, sa structure se répète de manière semblable à toutes les échelles d'observation. Cependant, les objets naturels ne sont auto-similaires que statistiquement, et il est plus approprié dans ce cas pour les décrire, d'utiliser le terme *invariance d'échelle*. Il est alors pratique pour déterminer la dimension fractale de tels objets, de calculer la quantité statistique suivante, appelée *fonction de corrélation* :

$$c(\vec{r}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{r}'} \rho(\vec{r} + \vec{r}') \rho(\vec{r}')$$

Cette expression donne en fait la probabilité de trouver une particule à la position  $\vec{r} + \vec{r}'$  si il y en a une en  $\vec{r}'$ .  $\rho$  représente une densité locale, c'est-à-dire qu'elle prend la valeur 1 si le point  $\vec{r}$  appartient à la structure, et 0 sinon.  $N$  est le nombre de particules dans l'objet. Comme les fractales sont généralement isotropiques (les corrélations ne dépendent pas de la direction, mais uniquement de la distance  $r$ ), nous avons  $c(\vec{r}) = c(r)$ .

Nous pouvons montrer que la fonction de corrélation est un critère pour la géométrie fractale : un objet vérifie la propriété d'invariance d'échelle si pour un facteur  $b$  arbitraire,

$$c(br) \propto b^{-\alpha} c(r) \quad (12)$$

où  $\alpha$  est un réel supérieur à 0 et inférieur à  $m$ , la dimension de l'espace. Il peut être

également démontré que la seule fonction satisfaisant à la relation (12) est

$$c(r) \propto r^{-\alpha}$$

ce qui correspond à une décroissance de la fonction de corrélation par rapport à la distance  $r$ . L'exposant  $-\alpha$  représente donc la pente de la droite d'équation  $y = \log c(r)$  sur un diagramme logarithmique de coordonnées  $(\log r, \log c(r))$ . Nous pouvons alors calculer la dimension fractale  $D$  à partir de  $\alpha$ . En effet, considérons  $M(L)$  le nombre de particules à l'intérieur d'une sphère de rayon  $L$ , nous avons

$$M(L) \propto \int_0^L c(r) d^m r$$

Or,  $c(r) \propto r^{-\alpha}$ , d'où

$$M(L) \propto L^{m-\alpha}$$

Si nous comparons cette dernière relation avec celle établie dans la méthode masse-rayon, à savoir  $M(L) \propto L^D$ , nous obtenons finalement

$$D = m - \alpha$$

Pour calculer en pratique  $c(r)$ , nous devons procéder de la manière suivante : nous choisissons une particule appartenant à la structure, et nous comptons le nombre de particules intérieures à un voisinage sphérique de rayon  $r$  et de largeur  $\delta r$  (généralement  $\delta r \approx 0.1r$ ). La même procédure est répétée pour toutes les autres particules. Enfin, nous normalisons le résultat en considérant le nombre de centres et le volume des voisinages utilisés.

## 4. Géométrie fractale dans le corps humain : dimension fractale des vaisseaux de la rétine.

### 4. 1. INTRODUCTION.

La biologie et la médecine semblent constituer une source inépuisable pour l'application des concepts fractals. Le phénomène de croissance biologique conduit presque toujours à la formation de modèles organiques complexes. Que ce soient la structure arborescente des bronches pulmonaires, celle du réseau neural ou des vaisseaux sanguins, de nombreux systèmes biologiques présentent la caractéristique d'auto-similarité ou d'invariance d'échelle.

Dans ce chapitre, nous analysons de manière quantitative la géométrie des vaisseaux sanguins de la rétine humaine, et en déterminons sa dimension fractale par la méthode "box-counting". Notre résultat est semblable à celui obtenu par Family, Masters et Platt dans leur article "Fractal pattern formation in human retinal vessels". Mais ces derniers ont utilisé les deux autres méthodes d'analyse : la relation masse-rayon et la fonction de corrélation.

Le modèle du développement des vaisseaux rétiens se base sur le phénomène d'agrégation à diffusion limitée. L'objectif de l'article précédemment cité, était de fournir un support quantitatif à ce modèle. Notre but est d'implémenter en plus, une méthode facile à mettre en oeuvre, efficace et rapide grâce au traitement d'image par ordinateur.

### 4. 2. L'AGRÉGATION À DIFFUSION LIMITÉE.

De nombreux processus de croissance naturels sont régis par la distribution dans l'espace d'une certaine quantité dont la valeur en un certain point dépend non seulement de son voisinage immédiat, mais aussi de points plus distants dans le système. Nous pouvons citer comme exemples, la distribution de la température durant la phase de solidification, le potentiel électrique autour d'un conducteur chargé, ... Ces processus sont communément appelés *croissance à diffusion limitée*. Quelques-uns de ces phénomènes peuvent être simulés par ordinateur grâce au modèle d'agrégation à diffusion limitée de Witten et Sanders (1981), dont les règles simples sont les suivantes :

Considérons le noeud origine d'un "treillis", représentant une particule stationnaire. Une autre particule part d'une position (un noeud) quelconque éloignée de l'origine, et suit une trajectoire aléatoire jusqu'à ce qu'elle arrive sur un noeud adjacent à la particule



stationnaire. Dès lors, elle s'arrête et occupe définitivement ce noeud. Une autre particule est lancée et stoppera lorsqu'elle aura atteint une position adjacente à l'un des deux noeuds déjà occupés, et ainsi de suite ...

Ce modèle conduit à des structures fractales, arborescentes et statistiquement auto-semblables, comme par exemple sur la figure 4.1.

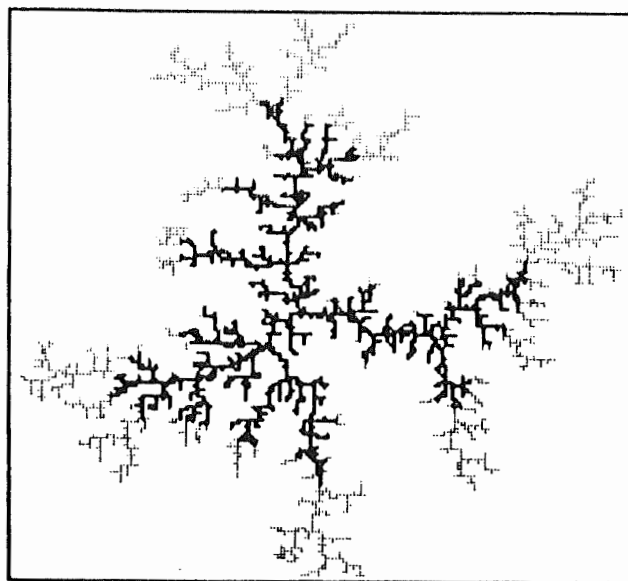


figure 4.1. structure fractale par agrégation à diffusion limitée.

La dimension fractale de telles structures peut être déterminée par une des méthodes présentées précédemment, mais il est possible en théorie d'obtenir une expression simple de la dimension fractale (Tokuyama et Kuwasaki 1984) par  $D = (m^2 + 1)/(m + 1)$ , où  $m$  est la dimension de l'espace. Cette relation donne de manière surprenante une valeur très proche du résultat des simulations, à savoir pour  $m = 2$ ,  $D \approx 1.7$ .

Les vaisseaux rétiens ont une structure auto-semblable et une dimension fractale avoisinant 1.7 comme nous le verrons dans la section suivante. L'objectif de Family, Masters et Platt a donc été atteint puisque ce dernier résultat confirme l'hypothèse que la diffusion limitée est le processus fondamental de la formation des vaisseaux de la rétine humaine.

#### 4. 3. ANALYSE FRACTALE DES VAISSEAUX SANGUINS DE LA RÉTINE.

La structure fractale de la rétine humaine s'analyse à partir d'une angiographie fluorescéinique, c'est-à-dire une radiographie des vaisseaux après l'injection d'un liquide opaque et colorant : la fluorescéine. La photographie de la figure 4.2 illustre une telle structure.

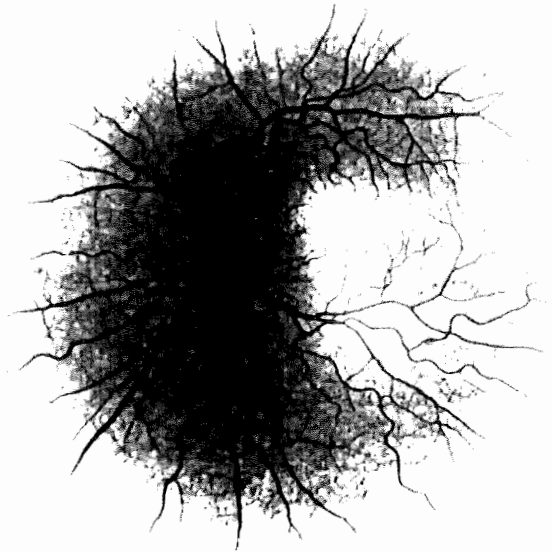


figure 4.2. angiographie de la rétine.

En premier lieu, nous présenterons les résultats de l'article "Fractal pattern formation in human retinal vessels" obtenus par la relation masse-rayon d'une part, et par la fonction de corrélation d'autre part. Ensuite, nous verrons comment déterminer la dimension à partir de l'angiographie digitalisée par la méthode "box-counting".

##### 4.3.1. Relation masse-rayon et fonction de corrélation.

Bien que la largeur des vaisseaux varie avec la distance par rapport à l'origine du nerf optique, les auteurs de l'article ont ignoré cette variation et mesuré leur longueur sur base également d'angiographies digitalisées.

<i>patient</i>	<i>dimension fractale</i>
A	$1.64 \pm 0.03$
B	$1.66 \pm 0.03$
C	$1.72 \pm 0.03$
D	$1.75 \pm 0.02$
E	$1.69 \pm 0.02$
F	$1.73 \pm 0.04$

tableau 4.1. dimension fractale de la rétine de six patients obtenue par la méthode masse-rayon.

En supposant que  $M(r)$ , la masse comprise dans un cercle de rayon  $r$ , est proportionnelle à la longueur des vaisseaux, ils ont calculé la dimension fractale  $D$  à partir de la relation  $M(r) \propto r^D$ . Pour six patients différents, ils ont obtenu les valeurs du tableau 4.1.

Ces valeurs sont en fait les pentes des droites sur un diagramme logarithmique comme illustré pour le patient C sur la figure 4.3, où le coefficient angulaire de la droite est de 1.72.

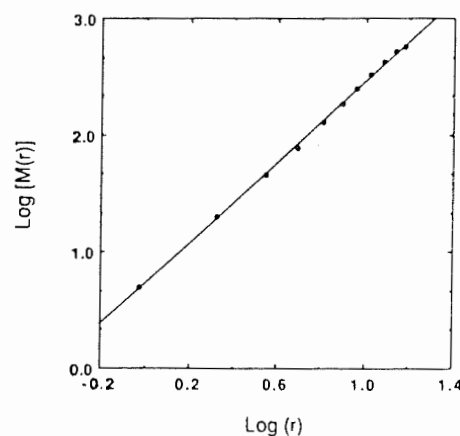


figure 4.3. diagramme logarithmique pour la relation masse-rayon.

Les auteurs ont également déterminé la fonction de corrélation à partir des coordonnées des points appartenant aux vaisseaux de la rétine, grâce à la digitalisation. Sur le diagramme de la figure 4.4, nous pouvons observer le comportement plus ou moins linéaire de  $c(r)$  pour  $-1 < \log r < 1$ . Dans cette région,  $c(r)$  décroît avec une pente  $\alpha = 0.29$ , et la structure est auto-semblable. En dehors, la fonction de corrélation décroît plus rapidement.

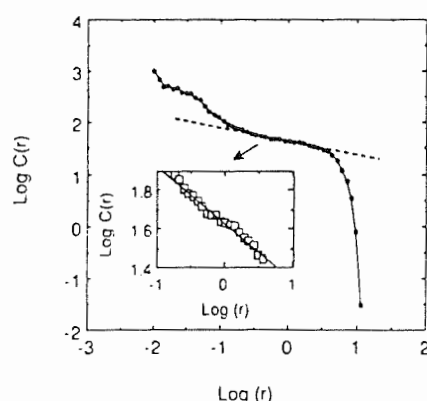


figure 4.4. diagramme logarithmique pour la fonction de corrélation.

Family, Masters et Platt ont donc établi pour chacun des six patients un tel diagramme afin de calculer le coefficient  $\alpha$ , et par suite la dimension fractale  $D$  par la relation  $D = m - \alpha$ , où  $m$ , la dimension de l'espace, vaut 2. Les valeurs obtenues sont celles du tableau 4.2.

Même si les deux méthodes donnent des résultats légèrement différents, la dimension fractale des vaisseaux rétiens semble avoir une valeur moyenne de 1.7. Ceci fournit donc bien un support quantitatif au modèle théorique de la diffusion limitée.

Il faut cependant ajouter quelques remarques : la géométrie de l'oeil pourrait influencer le calcul de la dimension fractale, dans la mesure où cette dimension se détermine à partir d'une photographie (comme dans la majorité des applications). Or, la photographie projette la surface courbe du globe oculaire sur une surface plane. En outre, la projection d'une fractale contenue dans un espace de dimension  $m$  (dans la plupart des cas,  $m = 3$ ) sur une surface de dimension  $m - d$  (ici,  $d = 1$ ), donne une structure de même dimension

<i>patient</i>	<i>dimension fractale</i>
A	$1.71 \pm 0.02$
B	$1.71 \pm 0.03$
C	$1.75 \pm 0.03$
D	$1.82 \pm 0.04$
E	$1.88 \pm 0.05$
F	$1.82 \pm 0.04$

tableau 4.2. dimension fractale de la rétine de six patients obtenue par la fonction de corrélation.

fractale  $D$  si  $D < m - d$ . Malheureusement, ce ne sont que des arguments heuristiques car des déviations peuvent apparaître lorsque  $D$  est légèrement inférieure à  $m - d$ . C'est le cas en ce qui concerne les valeurs mesurées par les trois auteurs. Ils supposent donc que la projection de la rétine sur un plan, a eu une petite mais perceptible influence sur la précision des résultats. Par contre, lorsque  $D > m - d$ , l'objet projeté possède une dimension égale à  $m - d$ .

#### 4.3.2. La méthode "box-counting".

Digitaliser l'image d'une structure fractale est une manière efficace pour obtenir des données quantitatives sur sa géométrie. L'information est décodée par un scanner et ensuite transmise dans la mémoire de l'ordinateur. Elle y est enregistrée sous la forme d'un tableau bidimensionnel de pixels dont les éléments non nuls correspondent en général aux régions de l'image occupées par l'objet. Cette technique convient donc parfaitement pour le calcul de la dimension fractale par la méthode "box-counting" puisque, comme nous l'avons déjà dit auparavant, un pixel peut être considéré comme un carré dont la longueur des côtés est très petite. Notre idée était donc de comptabiliser les pixels du bitmap résultant de la digitalisation de l'angiographie, qui correspondaient à la région occupée par les vaisseaux sanguins. Nous avons alors implémenté l'algorithme suivant :

- lire chaque pixel du bitmap et compter le nombre de pixels noirs (*count*).
- déterminer la longueur du côté du carré de recouvrement en nombre de pixels (*cote*).

- déterminer la dimension fractale ( $dim = \log(count) / \log(cote)$ ).

Les pixels noirs sont ceux qui représentent les vaisseaux, et le carré de recouvrement est celui qui recouvre l'objet fractal entier. Ainsi, dans le théorème 3.3 de la méthode "box-counting",  $N_n(A)$  et  $2^n$  correspondent respectivement à *count* et *cote*. Par application de ce théorème, nous déterminons bien la dimension fractale par la relation  $\log(count) / \log(cote)$ . Pour ce faire, nous avons du naturellement fixer une unité de longueur pour le carré de recouvrement, soit cette unité = *cote*, ou plus précisément *cote* \* longueur d'un pixel = 1 (de la même manière que  $2^n$  \* longueur d'un côté d'un petit carré de la subdivision =  $2^n * \frac{1}{2^n} = 1$ ).

Le programme a été écrit en langage C sous l'environnement Windows, un outil exigeant une programmation complexe, mais cependant pratique pour traiter les bitmaps sur un PC, et offrant à l'utilisateur une interface de qualité. Nous nous contenterons de ne donner dans ce chapitre que le pseudo-code de l'algorithme de calcul de la dimension fractale. Le programme complet avec ses différents modules se trouve en annexe.

#### Algorithme :

Les variables utilisées autres que *count*, *cote* et *dim*, sont les suivantes :

*i*, *j* : indices de boucle pour parcourir la fenêtre de Windows contenant le bitmap, selon respectivement l'abscisse et l'ordonnée de chaque pixel.

*imin*, *imax* : respectivement la plus petite et la plus grande abscisse de l'objet fractal.

*jmin*, *jmax* : respectivement la plus petite et la plus grande ordonnée de l'objet fractal.

*rr*, *rb* : respectivement la dernière abscisse et ordonnée de la fenêtre de Windows.

**Fonction** Dimension ;

*count* := 0 ; *imin* := 1000 ; *jmin* := 1000 ; *imax* := 0 ; *jmax* := 0 ;

**pour** *i* = 1 à *rr* **faire**

**pour** *j* = 1 à *rb* **faire**

**lire** le pixel de coordonnées (*i*, *j*) ;

si la couleur du pixel est noire alors

```
count := count + 1 ;  
imin := min (i, imin) ; jmin := min (j, jmin) ;  
imax := max (i, imax) ; jmax := max (j, jmax) ;
```

fin faire ;

fin faire ;

```
cote := max (imax - imin, jmax - jmin) + 1 ;
```

```
dim := log (count) / log (cote)
```

Toute la difficulté a été de l'intégrer dans l'environnement Windows. Le programme a été mis au point sur un PC 386 SX, et est inclu dans un fichier appelé "bon.cpp", sans oublier que le fichier contenant le bitmap est du type "bmp". Il s'exécute en choisissant dans Windows, l'application "scan" (si celle-ci y a été installée). Une fenêtre avec un menu est alors ouverte. En premier lieu, l'utilisateur chargera le bitmap en prenant dans le menu "charger bmp". Ensuite, "dimension" calculera et affichera la dimension fractale de l'objet considéré, en l'occurrence dans notre cas, les vaisseaux de la rétine humaine. Ces opérations génèrent les trois écrans de la figure 4.5.

La photographie de la figure 4.6 est l'angiographie de la rétine que nous avons digitalisée et ensuite filtrée afin de ne laisser apparaître que les vaisseaux.

Nous avons obtenu des résultats semblables à ceux présentés dans l'article et calculés par les méthodes masse-rayon et fonction de corrélation, à savoir une dimension fractale  $D$  de l'ordre de 1.7. Mais nous ne pouvons évidemment pas faire une véritable étude comparative entre les trois méthodes et affirmer qu'une d'entre elles fournit des informations plus précises. De plus, nous sommes toujours confrontés au problème de la projection. Cependant, la méthode "box-counting" nous semble simple à implémenter et nos résultats constituent un bon support quantitatif à la théorie, et en particulier au théorème 3.3.

Nous pouvons nous interroger maintenant sur l'intérêt de connaître la dimension d'une structure fractale, et en l'occurrence celle des vaisseaux sanguins de la rétine humaine. Les ophtalmologues recherchent de nouvelles méthodes pour analyser les maladies de la rétine et quantifier leur gravité et leur progression. L'étude que nous présentons pour-

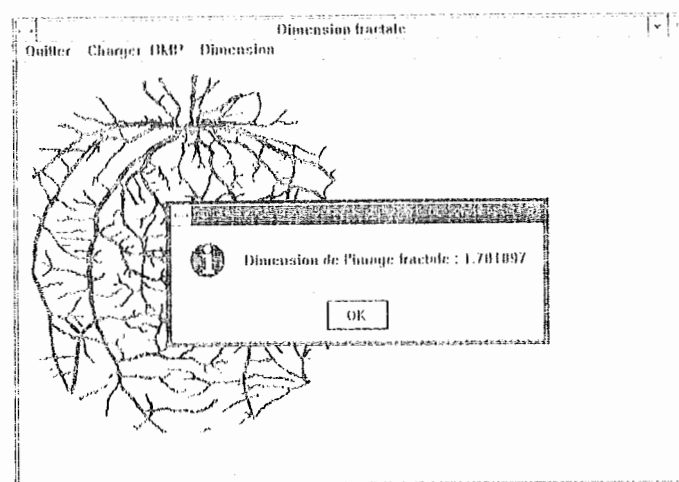
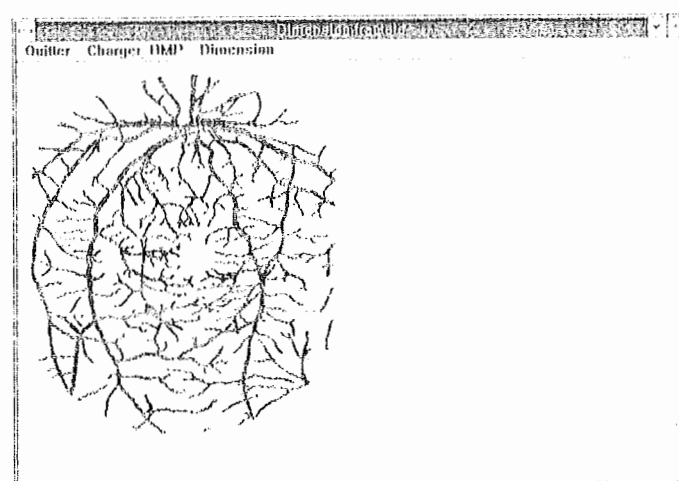
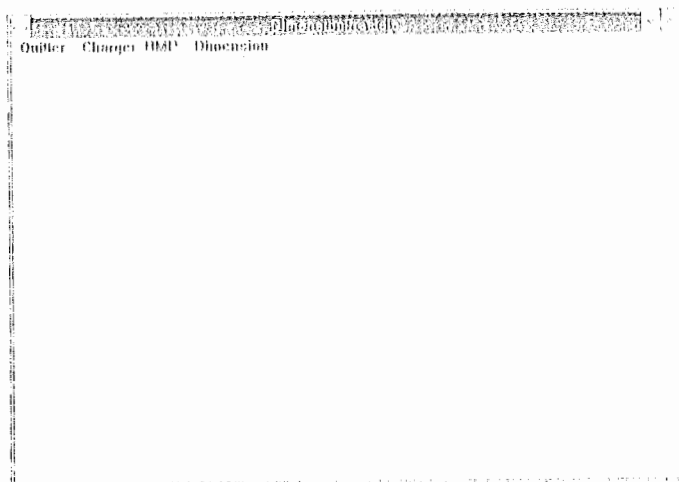


figure 4.5. écrans Windows de l'application "scan".



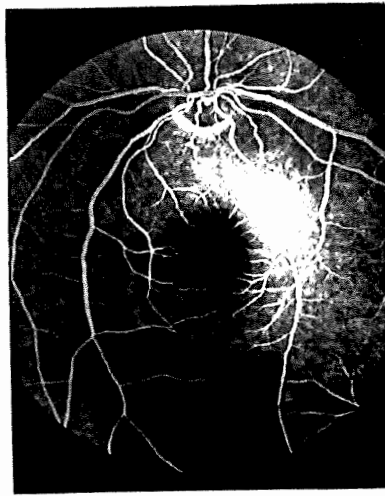


figure 4.6.

rait, comme le disent les auteurs de l'article, servir d'outil de diagnostic à la détection de maladies vasculaires, si par exemple, il peut être démontré que la dimension fractale des vaisseaux rétiniens diffère pour un malade diabétique par rapport à une personne en bonne santé. D'autres applications sont aussi à envisager, et des études sont actuellement en cours dans cette voie.

#### 4. 4. D'AUTRES EXEMPLES D'ARCHITECTURE FRACTALE DANS LE CORPS HUMAIN.

Les vaisseaux sanguins de la rétine constituent un exemple parmi tant d'autres d'organe à architecture fractale dans le corps humain. En effet, le réseau bronchial, par exemple, rappelle les structures fractales : les bronches et les bronchioles d'un poumon forment un arbre dont les ramifications sont régies par un désordre orchestré par certaines lois : les arborescences de petite taille sont semblables à celles de plus grande taille.

Les médecins ne comprennent pas encore entièrement les conséquences physiologiques que peut avoir la géométrie fractale dans les systèmes vivants, mais ils ont conscience qu'une telle géométrie apporte une approche intéressante, nouvelle et essentielle pour la compréhension des systèmes biologiques. D'ailleurs, plusieurs groupes de recherche s'activent à déceler les indices d'un tel type d'architecture dans les réseaux de vaisseaux sanguins des poumons, ou du cœur en particulier. Nous pouvons illustrer le rôle vital que jouent les structures fractales dans l'organisme, en premier lieu dans les vaisseaux des poumons, et ensuite au niveau de la dynamique mécanique et électrique du cœur.

Les poumons grâce à leurs capillaires, assurent l'échange primordial du gaz carbonique et de l'oxygène entre le sang et l'air. Il consomme énormément de substances différentes pour se nourrir, réparer les tissus abîmés et se protéger notamment des bactéries inhalées. Ce métabolisme se caractérise donc par des mouvements continuels de molécules non seulement de grosse taille comme les immunoglobines, mais aussi de taille plus petite comme les ions sodium, quittant la circulation sanguine pour aller à l'intérieur des tissus pulmonaires et répondre à toute agression extérieure. Il doit cependant également empêcher la perte de fluide, car celle-ci, en remplissant les espaces du poumon destinés à contenir de l'air, perturberait la diffusion des gaz respiratoires. Le poumon doit donc réguler la diffusion et la filtration de molécules dont les tailles peuvent varier d'un rapport de un à dix. Or, il se fait que les espaces intercellulaires qui permettent une régulation de la diffusion des molécules entre les cellules, est fractionné et présente une architecture fractale semblable à un ensemble de Cantor de dimension  $D = 0.79$ , c'est-à-dire à une subdivision d'espaces ouverts répétée à des échelles de longueur variables. Les jonctions entre les capillaires pulmonaires créent donc un ensemble de passages de taille hétérogène, et la variation du nombre de ces jonctions et de la taille des espaces ouverts, offre un moyen de moduler la diffusion selon les besoins de l'organisme. La géométrie fractale permet donc le contrôle des échanges de macromolécules entre le sang et les tissus, et limite l'afflux de liquide dans les espaces tissulaires.

J'aurais bien aimé, dans le cadre de la première application médicale, déterminer la dimension fractale du réseau bronchial des poumons à l'aide de la méthode "box-counting". Mais je n'ai pu me procurer de photographie d'une coupe transversale d'un poumon laissant apparaître clairement l'architecture fractale d'un tel réseau, contrairement à l'exemple de la rétine humaine.

En ce qui concerne le coeur, les structures fractales jouent un rôle primordial notamment dans le réseau des veines et artères coronaires conduisant le sang entrant ou venant du muscle cardiaque. Nous aurons l'occasion de donner une description concise de l'anatomie du coeur dans le chapitre suivant, lorsque nous étudierons le second type d'application médicale relatif celui-ci à l'approche dynamique chaotique et qualitative des fractales, sur le rythme cardiaque. L'architecture fractale se manifeste également dans certains tissus intérieurs au coeur et reliant des valves aux muscles sous-jacents. De même, la structure arborescente du faisceau de His, qui conduit les impulsions électriques des oreillettes aux muscles cardiaques des ventricules, est fractale. Même si ce faisceau est endommagé pour une raison ou pour une autre, le coeur peut continuer à battre avec un dysfonctionnement minime.

En fait, les structures fractales, de par leurs redondances et irrégularités, semblent plus robustes et résistantes aux lésions. De plus, elles accroissent considérablement, grâce

à leurs arborescences et leurs plis, la surface utilisable pour l'absorption, comme dans l'intestin, la diffusion ou la réception par les vaisseaux sanguins ou les bronches, et le transport d'information par les nerfs.

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités au premier type d'étude fractale pour des applications médicales, à savoir la topologie et la géométrie fractale dans certains organes du corps humain. Or, nous avons vu dans les deux premiers chapitres, qu'il existait un lien étroit entre chaos et fractale. Notre intérêt va donc se porter désormais sur l'aspect fractal mais d'un point de vue dynamique chaotique, et par conséquent plus qualitatif, des rythmes physiologiques, et en particulier du rythme cardiaque.

## 5. Un rythme physiologique chaotique : le rythme cardiaque.

### 5. 1. INTRODUCTION.

Des progrès considérables sont faits depuis quelques années dans l'application des techniques mathématiques à l'analyse des mécanismes et de la dynamique des systèmes biologiques. Ces mécanismes sont régis par des lois non linéaires, ils se modélisent généralement sous la forme d'équations différentielles ordinaires non linéaires. Les modèles sont la plupart du temps de petite dimension, les solutions des équations peuvent donc être caractérisées grâce aux différents outils de la théorie qualitative des systèmes dynamiques, et notamment l'espace des phases. Nous retrouvons donc de nombreux processus oscillatoires de formes diverses dans le monde biologique, dont les périodes varient entre des fractions de seconde comme pour les neurones du système nerveux central chez les mammifères, et les rythmes annuels chez les plantes.

Les modèles mathématiques sont suffisamment bien développés pour que leurs prédictions théoriques puissent se comparer aux données expérimentales et cliniques. Cependant, certains d'entre eux, nous le verrons notamment lors de l'étude du rythme cardiaque, peuvent remettre en question des théories physiologiques bien ancrées dans l'intuition et les traditions médicales. En effet, les pensées courantes en physiologie étaient dominées par le concept d'homéostasie, c'est-à-dire la tendance pour un système, à maintenir un milieu interne relativement stable et constant. Il était supposé que le mécanisme de contrôle physiologique servait exclusivement à rétablir la stabilité et l'équilibre de systèmes perturbés. Mais, il est maintenant reconnu que ce n'est pas toujours le cas. Un comportement dynamique complexe peut caractériser une régulation biologique. Citons par exemple le cas de la crise d'épilepsie : plusieurs observations et études par la théorie des systèmes dynamiques, suggèrent qu'une crise d'épilepsie pourrait être un mécanisme "réparateur" automatique rétablissant la coordination des nerfs, après que celle-ci ait été rompue à la suite d'une transition dynamique antérieure vers un comportement désordonné. Donc, d'un certain point de vue, la crise serait un phénomène "correcteur" plutôt qu'une déficience.

Mais nous allons voir plus en détail, le rôle déterminant du chaos dans le cas particulier du rythme cardiaque.

## 5. 2. CHAOS DANS LE RYTHME CARDIAQUE.

Les théories et modèles mathématiques ont énormément contribué aux récentes découvertes en physiologie cardiaque. Comme l'intensité du pouls et l'intervalle entre deux battements d'une personne au repos et en bonne santé, semblent relativement constants, les cardiologues considéraient le rythme cardiaque normal comme une sinusoïde régulière. Mais une analyse plus fine révèle que le mécanisme qui contrôle le rythme cardiaque est intrinsèquement chaotique. Le rythme du coeur même d'un individu sain, subit d'importantes fluctuations, il peut varier fortement de minute en minute ou d'heure en heure sans revenir à un état stationnaire homéostatique.

Ces conclusions sont l'objet de ce chapitre, je vais y présenter une étude qualitative du rythme chaotique du coeur, menée notamment par le physiologiste Ary Goldberger. Mais auparavant, je décrirai brièvement l'anatomie et la physiologie du coeur et introduirai ensuite, un autre outil d'analyse qualitative des systèmes dynamiques que celui de l'espace des phases, et utile pour déceler la présence de chaos dans le rythme cardiaque : le spectre de Fourier.

### 5.2.1. Anatomie et physiologie du coeur.

Le coeur est un organe extraordinairement complexe, et il est impossible dans le cadre de ce mémoire, de décrire son fonctionnement de manière détaillée. Nous allons nous restreindre alors à une description simplifiée de son anatomie et de ses propriétés électriques. Pour ce faire, nous nous aiderons de la figure 5.1.

Le coeur humain est une pompe constituée de quatre cavités : les deux oreillettes situées dans la partie supérieure du coeur, servent de chambre d'admission pour le sang veineux, et les deux ventricules, plus gros, situés dans la partie inférieure du coeur, servent de chambre de refoulement. La contraction du coeur commence dans les oreillettes, et s'effectue ensuite dans les ventricules. Des impulsions électriques produites dans le noeud sino-auriculaire (tissus capable de décharger spontanément des impulsions électriques à intervalles réguliers) synchronisent les contractions du coeur, et coordonnent l'activité des quatre cavités. Ce noeud est en fait un centre d'automatisme pour l'ensemble du coeur. C'est pour cette raison, que le rythme normal du coeur est appelé *rythme sinusal*. Les impulsions provoquent directement la contraction des oreillettes et se propagent vers le noeud atrio-ventriculaire, un second centre d'automatisme qui se trouve entre l'oreillette droite et le ventricule gauche. Le noeud atrio-ventriculaire les dirige alors vers les muscles ventriculaires le long du faisceau de His, puis dans le réseau des fibres de Purkinje. Ces fibres permettent le passage très rapide des impulsions électriques : elles s'étendent

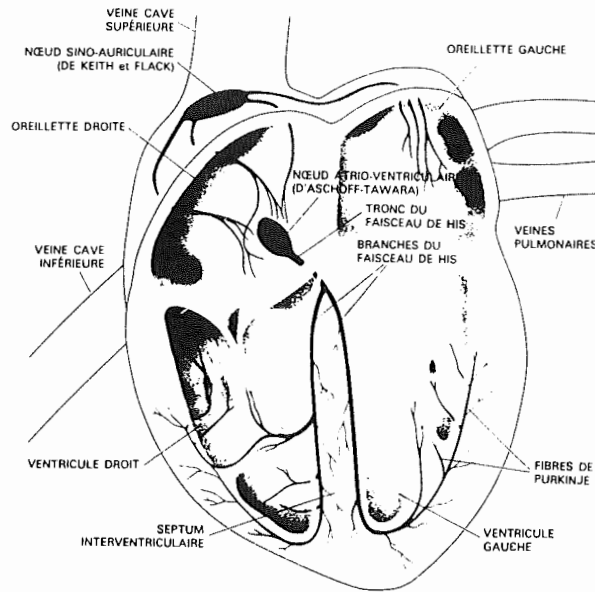


figure 5.1. anatomie du coeur humain.

dans toute la masse des ventricules à la manière des racines d'un arbre. Nous pouvons dès lors encore souligner l'importance dans ce cas-ci d'une structure arborescente, et donc fractale. Enfin, des impulsions électriques aboutissent aux muscles ventriculaires et une onde contracte les ventricules pendant quelques millisecondes. Lorsque l'organisme est au repos, le coeur humain se contracte presque comme un bloc et environ une fois par seconde. Toutefois, des impulsions émises par le système neural peuvent accélérer ou ralentir le rythme sinusal du coeur.

Le rythme cardiaque normal d'un coeur sain consiste donc, a priori, en une contraction régulière et périodique des oreillettes suivies quelques fractions de seconde plus tard, d'une contraction des ventricules.

Les propriétés électriques du coeur peuvent être observées à l'aide d'un électrocardiogramme, un appareil mesurant et enregistrant les différences de potentiel entre deux points de la surface du corps. L'électrocardiogramme caractérise l'activité cardiaque, et permet aux cardiologues de reconnaître et d'interpréter une irrégularité d'un rythme (arythmie) par rapport à un rythme normal. Pour analyser ses données et déterminer si les variations entre les battements du coeur sont périodiques ou chaotiques, nous disposons de deux outils mathématiques : l'un a été introduit dans le chapitre 2, il s'agit de l'espace des phases, l'autre est le spectre de Fourier du rythme cardiaque, spectre qui révèle les composantes périodiques.

Avant de présenter l'étude qualitative et dynamique du rythme cardiaque et ses con-

clusions bouleversant quelque peu les idées traditionnelles de la médecine, nous allons donc voir la notion de spectre de Fourier.

### 5.2.2. Le spectre de Fourier.

Lorsque le résultat d'une expérience ou de simulations numériques est un signal dépendant du temps,  $x(t)$ , l'analyse de Fourier permet de condenser de l'information de manière à accentuer les caractéristiques dynamiques les plus significatives du système.

Le développement fulgurant des méthodes algorithmiques, et le recours à l'analyse numérique amènent à considérer un signal  $x(t)$ , fonction continue du temps, comme une séquence discrète de nombres réels  $x_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , espacés régulièrement dans le temps par des intervalles de longueur  $\Delta t$ . Nous pouvons illustrer la discrétisation d'une fonction continue sur la figure 5.2, où les valeurs discrètes  $x_j$  sont prises en des instants  $\dots, j-1, j, j+1, \dots$ , chacune espacée par un intervalle de longueur  $\Delta t$ . La fonction continue  $x(t)$  est alors remplacée par la série des points  $P_j = (j, x_j)$  où  $x_j = x(j\Delta t) = x(j)$  si l'unité de temps est  $\Delta t$ .

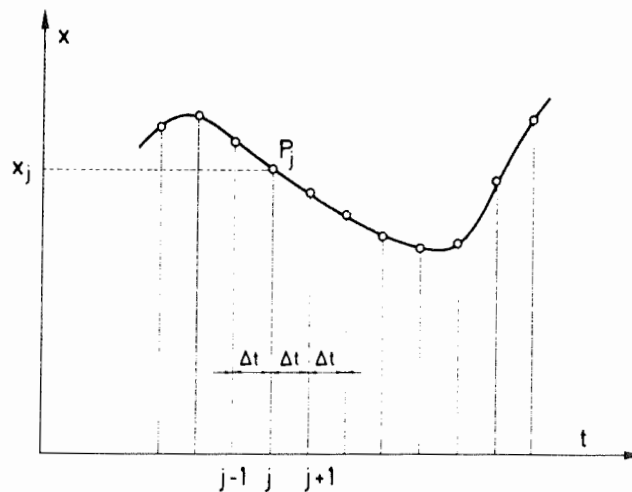


figure 5.2. discrétisation d'une fonction continue.

En pratique, les expériences nous fournissent donc de telles séries. Ces dernières sont nécessairement finies, elles contiennent  $n$  valeurs. Les quantités  $n$  et  $\Delta t$  sont donc deux

paramètres à déterminer selon des considérations pratiques.

Dès lors, nous allons à présent définir la transformation de Fourier, mais restreinte aux séries discrètes, puisque les données cliniques et en particulier de l'électrocardiogramme, sont des données numériques. Prenant  $\Delta t$  comme unité de temps :

**Définition 5.1 :** Nous définissons la *transformation de Fourier* d'une série discrète fonction du temps  $\{x_j\}_{j=1}^n$ , l'opération créant la série discrète correspondante  $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^n$  telle que

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j \exp\left(-i \frac{2\pi j k}{n}\right)$$

où  $k = 1, 2, \dots, n$ , et  $i$  est l'imaginaire pure. La série  $\{\tilde{x}_k\}$  est appelée la *transformée de Fourier* de  $\{x_j\}$ .

Nous pourrions appliquer la transformation de Fourier aux fonctions continues de la même manière que pour les séries discrètes, mais il nous faudrait alors remplacer la sommation par une intégration.

Nous pouvons également définir la transformation inverse qui permet d'exprimer la série initiale  $\{x_j\}$  en fonction de  $\{\tilde{x}_k\}$  :

**Définition 5.2 :** La *transformation de Fourier inverse* se définit par :

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k \exp\left(i \frac{2\pi k j}{n}\right)$$

Remarquons que la série  $\{x_j\}$  est périodique de période  $n$  (en fait  $n\Delta t$ , mais  $\Delta t$  a été choisi comme unité de temps), puisque  $x_{j+n} = x_j$ .

**Définition 5.3 :** Le graphe représentant  $|\tilde{x}_k|^2$  (  $|\tilde{x}_k|^2 = \tilde{x}_k \tilde{x}_k^*$  où  $\tilde{x}_k^*$  est le complexe conjugué de  $\tilde{x}_k$  ) en fonction de la fréquence  $f$  (  $f = k \Delta f$  où  $\Delta f = \frac{1}{n\Delta t}$  ), est appelé le *spectre de Fourier*.

Nous pouvons observer un tel graphe sur le deuxième diagramme de la figure 5.3.

Les caractéristiques du spectre de Fourier dépendent naturellement de la manière dont le signal évolue dans le temps. Le spectre de Fourier est un outil d'analyse très pratique, car il révèle des propriétés de l'évolution du signal qui autrement, resteraient inaperçues. Nous allons maintenant décrire la forme du spectre de Fourier selon la nature du signal.



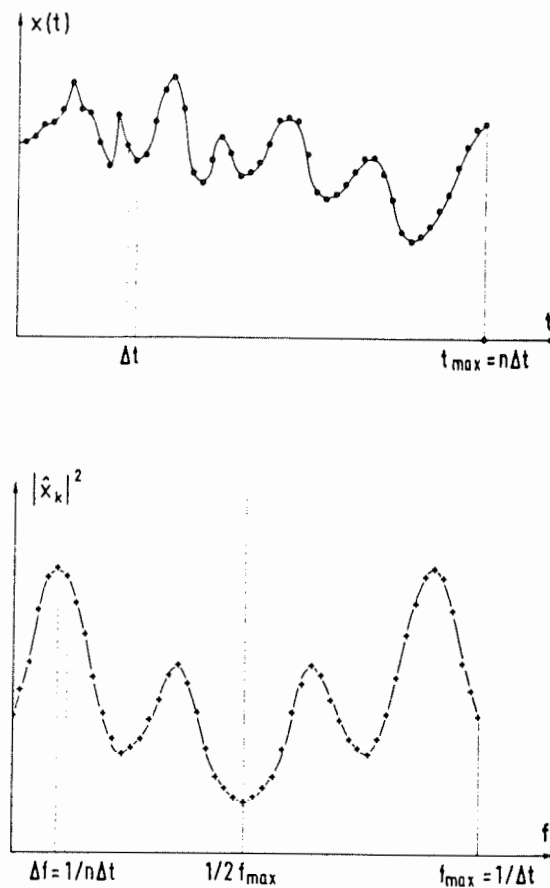


figure 5.3. fonction discrétisée et spectre de Fourier.

Nous considérerons en premier lieu, un signal périodique, ensuite un signal chaotique ou apériodique.

Soit  $x(t)$ , un signal périodique de période  $T$ , c'est-à-dire tel que  $x(t) = x(t + T) = x(t + \frac{2\pi}{\omega})$  puisque la période est l'inverse de la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . Supposons simplement que le signal est une fonction circulaire de la forme

$$x(t) = \exp \left( i \frac{2\pi t}{T} \right)$$

Si nous discrétisons ce signal en des intervalles de temps  $\Delta t$  par

$$x_j = \exp \left( i \frac{2\pi j \Delta t}{T} \right)$$

nous obtenons la transformée de Fourier de  $\{x_j\}$  :

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \exp \left( i \frac{2\pi j \Delta t}{T} \right) \exp \left( -i \frac{2\pi j k}{n} \right)$$

Posons  $\alpha_k = \frac{\Delta t}{T} - \frac{k}{n}$ , dès lors

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \exp(i 2\pi \alpha_k j)$$

$\{\tilde{x}_k\}$  est donc une série géométrique de raison  $r = \exp(i 2\pi \alpha_k)$  telle que  $|r| \leq 1$ , ce qui nous donne

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp(i 2\pi \alpha_k) \frac{1 - \exp(i 2n\pi \alpha_k)}{1 - \exp(i 2\pi \alpha_k)}$$

Dès lors, les amplitudes  $|\tilde{x}_k|^2$  du spectre de Fourier s'obtiennent par  $|\tilde{x}_k|^2 = \tilde{x}_k \tilde{x}_k^*$ , c'est-à-dire

$$|\tilde{x}_k|^2 = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(n\pi\alpha_k)}{\sin^2(\pi\alpha_k)}$$

Si nous supposons que la valeur de  $n\pi\alpha_k$  est finie et que  $n$  est grand,  $\pi\alpha_k$  est alors petit et nous avons asymptotiquement :

$$|\tilde{x}_k|^2 \simeq n \frac{\sin^2(n\pi\alpha_k)}{(n\pi\alpha_k)^2}$$

Le comportement de  $|\tilde{x}_k|^2$  ressemble donc à celui de la fonction  $\frac{\sin^2 z}{z^2}$  dont le graphe apparaît sur la figure 5.4.

La fonction a une amplitude maximum en  $z = 0$ , et une série de maxima secondaires en  $\pm(m + \frac{1}{2})\pi$  où  $m$  est un entier strictement positif, dont l'amplitude décroît comme  $\frac{1}{z^2}$ .  $|\tilde{x}_k|^2$  est donc maximum lorsque  $k = k_0$ , c'est-à-dire  $\alpha_k = 0$  ou encore  $k = \frac{n\Delta t}{T}$ , tandis que l'amplitude de  $|\tilde{x}_k|^2$  pour  $k = k_0 \pm m$  n'est pas nulle, même si elle décroît rapidement avec  $m$ .

Le spectre de Fourier d'un signal périodique de période  $T$  comporte donc un pic aigu à la fréquence  $\frac{1}{T}$  ( car  $\alpha_k = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{T} = \frac{k}{n\Delta t} = f$  ), et de pics secondaires beaucoup plus

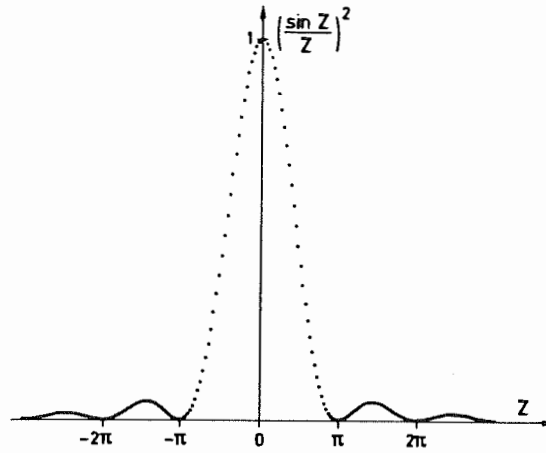


figure 5.4. graphe de la fonction  $\frac{\sin^2 z}{z^2}$ .

petits appelés *harmoniques* de la fréquence fondamentale  $f$ .

En ce qui concerne les signaux apériodiques, ceux-ci révèlent plutôt un comportement chaotique, et nous ne pouvons faire une analyse de la forme du spectre de Fourier aussi facilement et précisément que pour un signal périodique. Nous dirons simplement que le spectre de Fourier de tels signaux semble continu à l'instar du diagramme de la figure 5.5.

Grâce aux deux outils mathématiques que sont la représentation dans l'espace des phases de la dynamique d'un système non linéaire, et le spectre de Fourier, nous allons présenter une étude qualitative du rythme cardiaque décelant notamment la présence de chaos dans un coeur sain.

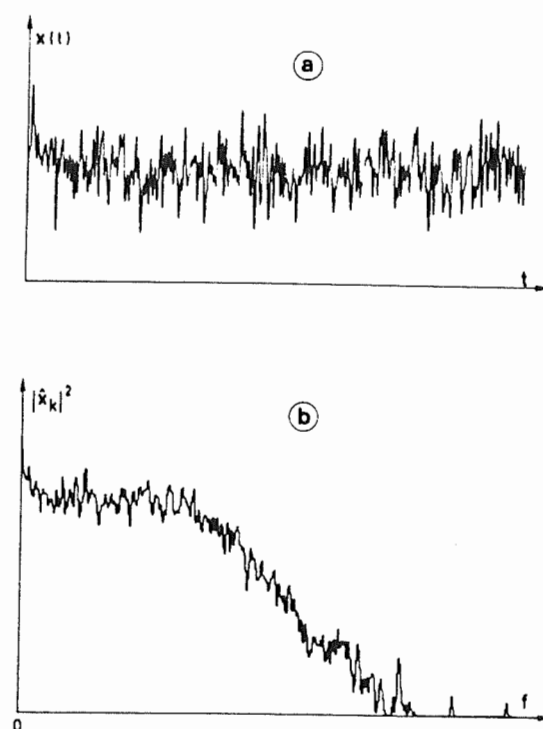


figure 5.5. signal aperiodique et son spectre de Fourier.

### 5.2.3. Etude qualitative du rythme cardiaque.

Avant toute chose, il nous faut préciser que l'étude qualitative présentée dans cette section, se base sur des observations cliniques et électrocardiographiques, et non sur un modèle mathématique du rythme cardiaque. Cependant, de tels modèles existent. Van der Pol et Van der Mark (1928) par exemple, ont proposé une modélisation du rythme cardiaque par des oscillateurs non linéaires couplés. En modifiant les fréquences relatives des oscillations, il leur était possible de reproduire de nombreuses arythmies cardiaques différentes. Mais devant l'extrême difficulté d'analyser mathématiquement les équations originales de ce modèle, d'autres auteurs et notamment Leon Glass du département de physiologie de l'université McGill à Montreal, simplifièrent le problème en étudiant les effets de stimuli vibratoires brefs délivrés périodiquement à un oscillateur cardiaque spontané. Ils conclurent finalement que leurs analyses théoriques d'arythmies cardiaques correspondaient généralement aux résultats observés en clinique. Ce sont ces derniers résultats à propos desquels nous allons à présent discuter.

Lorsque le médecin prend le pouls, ou écoute les battements du coeur à l'aide de son stéthoscope, le rythme pour une personne au repos, semble constant et régulier. Il y a à peine une dizaine d'années, les chercheurs commencèrent à appliquer la théorie du chaos aux systèmes physiologiques. Ils s'attendaient donc à ce qu'un comportement dynamique complexe et chaotique caractérise plutôt la maladie ou le vieillissement qu'un coeur en bonne santé. Un corps malade ou vieilli doit être moins apte à maintenir un rythme cardiaque constant au repos, ou homéostatique.

Mais Ary Goldberger, de la Harvard Medical School, prétend au contraire que le chaos fournit au corps humain, une flexibilité et souplesse lui permettant de répondre à différentes formes de stimulus, et en particulier, que le rythme cardiaque normal est chaotique et non une sinusoïde régulière comme les traditions médicales pouvaient inciter à le penser. Il fonde ces affirmations sur des analyses de spectres d'électrocardiogrammes effectués sur des sujets normaux et sur des patients cardiaques. Nous allons voir que les électrocardiogrammes des premiers présentent des irrégularités à des échelles allant de quelques secondes à quelques heures, tandis que ceux des seconds ont des spectres de fréquence significativement plus plats avec un pic aigu.

Si nous examinons sur la figure 5.6 le tracé graphique journalier des fluctuations de l'intervalle entre les battements du coeur d'un individu sain, nous remarquons une suite de points saccadée, irrégulière et à priori aléatoire. Cependant, à différentes échelles de temps, les variations du rythme cardiaque semblent avoir la même structure et présentent une similitude interne à l'instar d'une fractale. Plus l'échelle de temps est petite (de l'heure à la minute), plus les fluctuations se révèlent rapides mais toujours semblables à celles du graphique originel.

Ces observations nous amènent à considérer la dynamique du rythme cardiaque normal comme une dynamique chaotique. Même sans stimulus extérieur, les battements du coeur peuvent varier fortement chez une personne en bonne santé. Ary Goldberger appuie ses affirmations par des arguments supplémentaires. Il a représenté, comme nous pouvons le voir sur la figure 5.7, le rythme cardiaque par son évolution temporelle, son spectre de Fourier, et sa trajectoire dans l'espace des phases respectivement pour un cas pathologique quelques heures avant l'arrêt cardiaque, et pour un rythme sain.

Les trois diagrammes en haut de la figure, constituent un rythme pathologique treize heures avant l'arrêt du coeur. Le spectre de Fourier est plutôt plat, il ne présente pas de pics apparents, et la trajectoire dans l'espace des phases ressemble à un point fixe attracteur. Les diagrammes du centre représentent un autre rythme pathologique, huit heures avant l'arrêt cardiaque, avec un pic aigu pour le spectre de Fourier, et un cycle limite ("bruité") dans l'espace des phases. Ces différentes caractéristiques révèlent donc

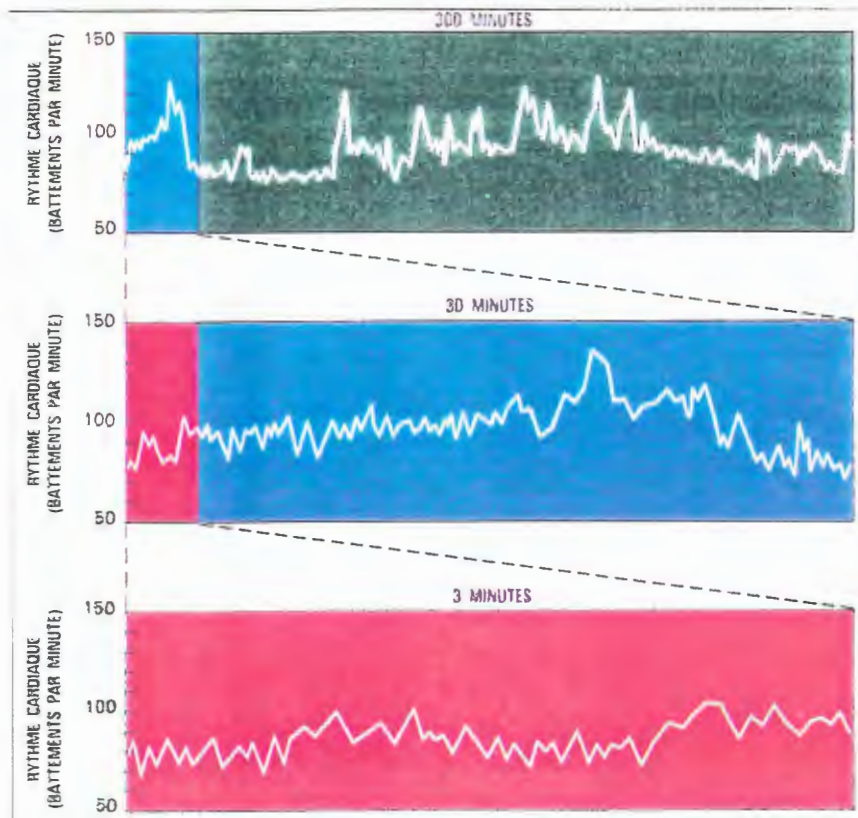


figure 5.6. similitude interne du rythme cardiaque d'un individu sain à 3 échelles de temps : 3, 30 et 300 minutes.

pour les cas pathologiques, un rythme périodique. Tandis qu'un rythme cardiaque normal, comme l'illustrent les diagrammes du bas de la figure, possède un spectre de Fourier large, et un attracteur étrange, caractéristique d'un processus dynamique complexe.

De nombreuses pathologies se traduisent donc par un comportement de périodicité et une perte de variabilité : l'analyse des enregistrements électrocardiographiques prouve que le cœur d'une personne mourante peut battre avec une grande régularité. Un comportement périodique peut indiquer une maladie, par contre, la présence de chaos est parfois signe de bonne santé.

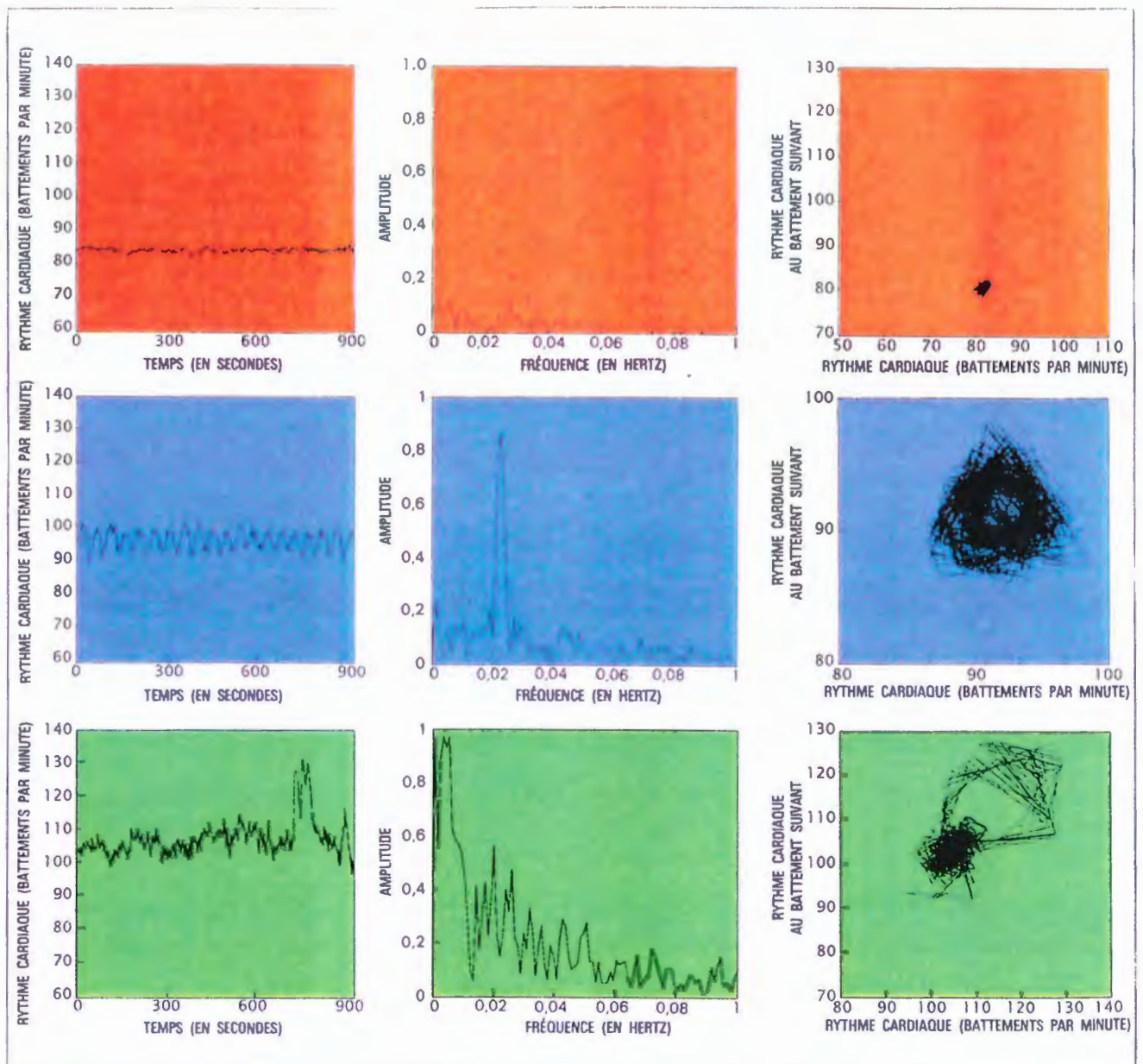


figure 5.7. évolution temporelle (à gauche), spectre de Fourier (au centre) et trajectoire dans l'espace des phases (à droite) de rythmes cardiaques.



Goldberger suppose que le mécanisme engendrant le chaos du rythme cardiaque sain, provient du système nerveux. Le sinus du coeur, son régulateur naturel, reçoit des signaux de la partie végétative, c'est-à-dire non volontaire, du système nerveux. Le système nerveux végétatif se décompose en parasympathique qui diminue la fréquence de décharge des cellules du sinus cardiaque, et en sympathique qui produit l'effet inverse. Ce sont ces influences opposées contrôlant le rythme des battements du coeur, qui expliqueraient les fortes fluctuations subies chez une personne saine.

Tout comme une architecture fractale pour certains organes du corps humain présente des qualités de robustesse, des facilités d'absorption, nous l'avons constaté dans le chapitre précédent, une dynamique chaotique offre plusieurs avantages fonctionnels : les systèmes chaotiques s'adaptent et sont plus souples face à des variations d'environnement que les systèmes périodiques rigides, ils supportent l'imprévisible.

Il faut néanmoins ajouter que le travail mené par le physiologiste Ary Goldberger et son équipe, a été controversé. Certaines critiques font remarquer que les structures observées dans les spectres de fréquence des électrocardiogrammes n'impliquent pas nécessairement le chaos, car elles peuvent résulter de signaux survenant accidentellement dans l'organisme au moment de l'enregistrement.

Cependant, ne refermons pas la porte vers une nouvelle compréhension du monde biologique que ces découvertes ont permis d'ouvrir. La physiologie constitue sans doute l'un des laboratoires les plus féconds pour l'étude des fractales et du chaos. Les systèmes dynamiques, la topologie, les attracteurs, la dimension fractale offrent un langage riche pour décrire les processus de développement et les architectures qu'ils engendrent, pour étudier le comportement des systèmes complexes. Les mesures associées au désordre et au chaos, fournissent la base pour construire les corrélations empiriques entre un comportement dynamique et les fonctions physiologiques. Dans un futur proche, l'étude des fractales et du chaos pourrait conduire à l'apparition de nouveaux protocoles thérapeutiques.



## 6. Conclusion.

Après quelques chapitres consacrés aux éléments théoriques pour étudier les notions de fractales et chaos, nous avons pu constater toute l'importance du rôle joué par ces deux concepts, pour découvrir et mieux comprendre le monde qui nous entoure, et en particulier notre propre système biologique : le corps humain. La médecine possède peut-être là, de nouvelles perspectives pour les diagnostics, la prévention et le traitement de certaines maladies.

Nous n'avons fait ici qu'un premier pas, nous avons d'abord dû introduire assez longuement la théorie. Ensuite, quelques difficultés d'ordre technique se sont présentées. Se procurer des photos d'organes ou des documents d'ordre médical, n'est pas chose aisée. De plus, nous étions limités au niveau du matériel informatique. Nous avons eu à notre disponibilité, un scanner piloté par un Macintosh, mais le format du bitmap de l'image digitalisée était incompatible avec celui accepté par Windows sur le PC 386 SX, à savoir le format "bmp". La conversion a posé quelques problèmes (nous ne possédions pas au départ, un logiciel convertisseur), et a donné un résultat de moins bonne résolution que celle du bitmap "original".

Pour laisser apparaître clairement les vaisseaux sanguins de la rétine, à cause de la mauvaise résolution, un filtrage s'imposait, mais faute de temps et de moyens, nous avons seulement filtré manuellement et de manière grossière. Il serait alors intéressant de mettre au point une méthode de filtrage automatique pour l'analyse d'une structure fractale digitalisée. Implémenter d'autres algorithmes pour calculer la dimension fractale, pourrait aussi s'envisager, de même que traiter les données d'un électrocardiogramme afin de les représenter dans l'espace des phases ou le spectre de Fourier.

Il y a dans le corps humain, de nombreux organes à architecture fractale et des rythmes physiologiques qui ne manquent pas d'intérêt à être étudiés. Le sujet de ce mémoire est interdisciplinaire, une manière idéale de le prolonger et d'approfondir les études, serait de collaborer avec un chercheur en sciences médicales.

## Annexe.

## Notions topologiques.

**Définition a.1 :** Soient deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $R^n$ , la *métrique euclidienne*  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  mesurant la distance entre  $x$  et  $y$  est définie par

$$d^2(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

où  $x_i$  et  $y_i$  sont respectivement la  $i$ ème composante de  $x$  et de  $y$ . L'espace muni de cette métrique  $(R^n, d)$  est appelé *espace euclidien*. Et en particulier,  $(R^2, d)$  est le *plan euclidien*.

**Définition a.2 :** Une fonction  $f : X_1 \rightarrow X_2$ , d'un espace métrique  $(X_1, d_1)$  vers un espace métrique  $(X_2, d_2)$ , est *continue* si, pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $x \in X_1$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

**Définition a.3 :** Une suite  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  de points d'un espace métrique  $(X, d)$  est une *suite de Cauchy* si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N > 0$  tel que pour tout  $n, m > N$  :

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Définition a.4 :** Une suite  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  de points d'un espace métrique  $(X, d)$  *converge* vers un point  $x \in X$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N > 0$  tel que pour tout  $n > N$  :

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

Dans ce cas, le point  $x$  est appelé *limite de la suite*, et nous utilisons la notation

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

**Théorème a.1 :** Si une suite  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  dans un espace métrique  $(X, d)$  converge vers un point  $x \in X$ , alors  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  est une suite de Cauchy.

**Définition a.5 :** Un espace métrique  $(X, d)$  est *complet* si toute suite de Cauchy  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$

dans  $X$  a une limite  $x \in X$ .

**Définition a.6 :** Soit  $S \subset X$  un sous-ensemble de l'espace métrique  $(X, d)$ . Un point  $x \in X$  est un *point limite* de  $S$ , si il existe une suite  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de points  $x_n \in S \setminus \{x\}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Définition a.7 :** Soit  $S \subset X$  un sous-ensemble de l'espace métrique  $(X, d)$ . La *fermeture* de  $S$ , notée  $\overline{S}$ , est définie comme  $\overline{S} = S \cup \{\text{points limites de } S\}$ .  $S$  est *fermé* si il contient tous ses points limites, c'est-à-dire si  $S = \overline{S}$ .

**Définition a.8 :** Soit  $S \subset X$  un sous-ensemble de l'espace métrique  $(X, d)$ .  $S$  est *compact* si toute suite de points de  $S$  contient une sous-suite convergente vers un point de  $S$ .

**Définition a.9 :** Soit  $S \subset X$  un sous-ensemble de l'espace métrique  $(X, d)$ .  $S$  est *borné* si il existe un point  $a \in X$  et un nombre réel  $R > 0$  tels que

$$d(a, x) < R \quad \forall x \in S$$

**Théorème a.2 :** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet. Soit  $S \subset X$ . Alors,  $S$  est compact si et seulement si  $S$  est fermé et borné.

**Définition a.10 :** Soit  $S \subset X$  un sous-ensemble de l'espace métrique  $(X, d)$ .  $S$  est *ouvert* si pour tout  $x \in S$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\} \subset S$ .

# Listing.

```

/*****
Programme                               Dimension fractale
*****/

#define IDM_0 0
#define IDM_1 1
#define IDM_2 2

#include <string.h>

#include <windows.h>
#include <stdio.h>
#include <float.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>

HBITMAP hBitmap;
HBRUSH hBrush;
RECT rect;

long FAR PASCAL WndProc (HWND, WORD, WORD, LONG) ;

/** point d'entrée du programme */

int PASCAL WinMain(HANDLE hInstance, HANDLE hPrevInstance,
                  LPSTR lpszCmdParam, int nCmdShow )
{
    /** le nom de l'application */

    static char szAppName[] = "Scan" ;
    WNDCLASS    wndClass;
    MSG         msg;
    HWND        hwnd;

    hBitmap = LoadBitmap(hInstance, "scan");
    hBrush = CreatePatternBrush(hBitmap);

    /** si aucune autre copie du programme n'existe */

    if ( !hPrevInstance )
    {
        /** définir la fenêtre */

        wndClass.style          = CS_HREDRAW | CS_VREDRAW ;
        wndClass.lpfnWndProc    = WndProc;
        wndClass.cbClsExtra     = 0;
        wndClass.cbWndExtra     = 0;
        wndClass.hInstance      = hInstance;
        wndClass.hIcon           = LoadIcon(NULL, "IDI_APP");
        wndClass.hCursor         = LoadCursor(NULL, IDC_ARROW );
        wndClass.hbrBackground   = GetStockObject(WHITE_BRUSH);
        wndClass.lpszMenuName    = szAppName;
        wndClass.lpszClassName   = szAppName;

        RegisterClass(&wndClass) ;
    }

    /** créer la fenêtre */

    hwnd = CreateWindow(szAppName,

```

```

        "Dimension fractale",
        WS_OVERLAPPEDWINDOW,
        0, 0, 640, 480,
        NULL,
        NULL,
        hInstance,
        NULL);

```

```

    /*** imprimer la fenêtre ***/

```

```

    ShowWindow(hwnd, nCmdShow);

```

```

    /*** garnir la fenêtre, générer le message WM_PAINT ***/

```

```

    UpdateWindow(hwnd);

```

```

    /*** boucle des messages ***/

```

```

    while (GetMessage(&msg, NULL, 0, 0))
    {

```

```

        TranslateMessage(&msg );

```

```

        DispatchMessage(&msg );
    }

```

```

    return msg.wParam;
};

```

```

/*****
Dessiner le BITMAP
*****/

```

```

void DrawBitmap(HDC hdc, HBITMAP hBitmap, short xstart, short ystart)

```

```

{
    BITMAP bm;
    HDC hdcmem;
    DWORD dwsz;
    POINT ptsz, ptorg;

    hdcmem = CreateCompatibleDC(hdc);
    SelectObject(hdcmem, hBitmap);
    SetMapMode(hdcmem, GetMapMode(hdc));
    GetObject(hBitmap, sizeof(BITMAP), (LPSTR)&bm);

```

```

    ptsz.x = bm.bmWidth;
    ptsz.y = bm.bmHeight;
    DPTOLP(hdc, &ptsz, 1);

```

```

    ptorg.x = 0;
    ptorg.y = 0;
    DPTOLP(hdcmem, &ptorg, 1);

```

```

    BitBlt(hdc, xstart, ystart, ptsz.x, ptsz.y, hdcmem, ptorg.x, ptorg.y, SRCCOPY);

```

```

    DeleteDC(hdcmem);
};

```

```

/*****
Calculer la dimension fractale
*****/

```

```

float Dimension(HDC hdc)

```

```

{
    int count=0,
        imin=1000,
        imax=0,
        jmin=1000,
        jmax=0,
        cote,i,j;
    float dim=0;
    unsigned long int rgbcolor;

    for (i=1; i <= (rect.right-1); i++)
    {
        SetPixel(hdc,i,rect.bottom-5,RGB(255,0,0));
        for (j=1; j <= (rect.bottom-6); j++)
        {
            rgbcolor = GetPixel(hdc,i,j);
            if (rgbcolor != RGB(255,255,255))
            {
                SetPixel(hdc,i,j,RGB(0,0,255));
                count = count+1;

                if (i<imin) imin = i;
                if (i>imax) imax = i;
                if (j<jmin) jmin = j;
                if (j>jmax) jmax = j;
            }
        }
    };

    if ((imin != 1000)&&(jmin != 1000))
    {
        if ((imax-imin)>(jmax-jmin))
        {
            cote = imax-imin+1;
        }
        else
        {
            cote = jmax-jmin+1;
        }
        dim = log(count)/log(cote);
        return dim;
    }
    else
    {
        return -1;
    }
};

/**/ traitement des messages ***/

long FAR PASCAL WndProc (HWND hwnd, WORD Message,
                        WORD wParam, LONG lParam)
{
    static HANDLE hInstance;
    HDC          hdc;
    PAINTSTRUCT ps;
    static float dim;
    static char szString[60]=" ";
    HBITMAP hbmp;

```



```

switch(Message)
{

    case WM_CREATE:
        hInstance = ((LPCREATESTRUCT) lParam)->hInstance;
        return 0;

    case WM_PAINT:

        /*** dessiner la fenetre ***/

        hdc = BeginPaint (hwnd, &ps);
        EndPaint (hwnd, &ps);
        return 0;

    case WM_COMMAND:

        switch(wParam)
        {
            case IDM_1:
                hdc=GetDC(hwnd);

                DrawBitmap(hdc,hBitmap,0,0);

                /* load bmp */

                hbmp = LoadBitmap(hInstance,"scan");

                /* draw bitmap */

                DrawBitmap(hdc,hbmp,0,0);
                ReleaseDC(hwnd,hdc);
                return 0;

            case IDM_2:
                GetClientRect(hwnd,&rect);
                hdc=GetDC(hwnd);
                dim=Dimension(hdc);
                if (dim!=-1)
                {
                    sprintf(szString,"Dimension de l'image fractale : %f",dim);
                    MessageBox(hwnd,szString,"",MB_ICONINFORMATION);
                }
                else
                {
                    MessageBox(hwnd,"Bitmap non charge","",MB_ICONEXCLAMATION);
                };
                ReleaseDC(hwnd,hdc);
                return 0;

            case IDM_0:
                SendMessage(hwnd, WM_CLOSE, 0, 0L);
                return 0;
        }
        break;

    case WM_DESTROY:

        /*** fermer la fenetre ***/

        PostQuitMessage(0);
        return 0;
}

```

```
    }  
    return DefWindowProc(hwnd, Message, wParam, lParam);  
}
```

## Références.

- Barnsley, M. : 1988, "Fractals everywhere." Academic Press Inc.
- Bergé, P., Pomeau, Y., Vidal, C. : 1984, "Order within Chaos." Editions Hermann.
- Bhatia, N.P., Szegő, G.P. : 1970, "Stability theory of Dynamical Systems." Springer-Verlag Berlin.
- Family, F., Masters, B.R., Platt, D.E. : 1989, "Fractal pattern formation in human retinal vessels." *Physica D*, **38**, 98–103.
- Glass, L., Hunter, P. : 1990, "There is a theory of heart." *Physica D*, **43**, 1–16.
- Goldberger, A., Rigney, D., West, B. : 1990, "Chaos et fractales en physiologie humaine." *Pour la science*, **150**, 50–57.
- Holden, A.V. : 1987, "Chaos." Manchester University Press.
- Isaacson, E., Keller, H.B. : 1966, "Analysis of numerical methods." John Wiley and sons.
- Mandelbrot, B. : 1989, "Les objets fractals : 3ème édition suivie de Survol du langage fractal." Flammarion.
- May, R.M. : 1991, "Le chaos en biologie." *La recherche*, **232**, 588–598.
- Mcnamee, J.E. : 1991, "Les fractales dans les vaisseaux des poumons." *La recherche*, **232**, 624–627.
- Meakin, P. : 1988, "Phase transitions and critical phenomena." Academic Press New York.
- Sonnenschein, J. : "De quelques théorèmes sur le point fixe des applications continues.", notes de cours.
- Takayasu, H. : 1990, "Fractals in the physical science." Manchester University Press.
- Vicsek, T. : 1989, "Fractal growth phenomena." World Scientific Singapore.
- Winfrey, A. : 1983, "La mort subite d'origine cardiaque : un problème de topologie." *Pour la science*, juillet 83, 14–28.
- "L'ordre du chaos" *Pour la science*, 1989.
- "Chaos and fractals, the mathematics behind the computer graphics." *Proceeding of Symposia in Applied Mathematics* volume 39, American Mathematical Society, 1989.

## Table des matières.

<b>0. Introduction.</b>	<b>1</b>
<b>1. Une approche topologique.</b>	<b>3</b>
1. 1. Les transformations sur des espaces métriques. . . . .	3
1. 2. Systèmes dynamiques, orbites, attraction et répulsion. . . . .	6
1. 3. En route vers le chaos topologique. . . . .	9
1. 4. Les fractales : géométrie et topologie. . . . .	12
<b>2. Une approche dynamique chaotique.</b>	<b>17</b>
2. 1. Introduction. . . . .	17
2. 2. Fractales et dynamique : chaos déterministe et attracteurs. . . . .	17
2. 2. 1. Systèmes dynamiques et équations différentielles. . . . .	18
2. 2. 2. Espace des phases et attracteurs. . . . .	20
2. 2. 3. Attracteurs étranges. . . . .	30
<b>3. La dimension fractale.</b>	<b>35</b>
3. 1. L'idée d'une dimension non entière. . . . .	35
3. 2. Les dimensions fractales. . . . .	35
3. 2. 1. Dimension de similitude. . . . .	36
3. 2. 2. Dimension de Hausdorff-Bésicovitch. . . . .	38
3. 2. 3. Dimension de capacité. . . . .	42
3. 2. 4. La méthode "box-counting". . . . .	44
3. 2. 5. La relation masse-rayon. . . . .	49
3. 2. 6. La fonction de corrélation. . . . .	50
<b>4. Géométrie fractale dans le corps humain : dimension fractale des vaisseaux de la rétine.</b>	<b>52</b>
4. 1. Introduction. . . . .	52
4. 2. L'agrégation à diffusion limitée. . . . .	52
4. 3. Analyse fractale des vaisseaux sanguins de la rétine. . . . .	54
4. 3. 1. Relation masse-rayon et fonction de corrélation. . . . .	54
4. 3. 2. La méthode "box-counting". . . . .	57
4. 4. D'autres exemples d'architecture fractale dans le corps humain. . . . .	61

<b>5. Un rythme physiologique chaotique : le rythme cardiaque.</b>	<b>64</b>
5.1. Introduction. . . . .	64
5.2. Chaos dans le rythme cardiaque. . . . .	65
5.2.1. Anatomie et physiologie du coeur. . . . .	65
5.2.2. Le spectre de Fourier. . . . .	67
5.2.2. Etude qualitative du rythme cardiaque. . . . .	72
<b>6. Conclusion.</b>	<b>77</b>
<b>Annexe.</b>	<b>78</b>
<b>Listing.</b>	<b>81</b>
<b>Références.</b>	
<b>Table des matières.</b>	